Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

ディプロマプログラム（ＤＰ）

「数学ＨＬ」
指導の手引き

2014年 第１回試験

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

ディプロマプログラム（ＤＰ）

「数学ＨＬ」
指導の手引き

2014年 第１回試験

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ディプロマプログラム（ＤＰ）

「数学ＨＬ」指導の手引き

2012年６月に発行、2014年８月に改訂の英文原本 *Mathematics HL guide* の日本語版
2015年５月発行

本資料の翻訳・刊行にあたり、
文部科学省より多大なご支援をいただいたことに感謝いたします。

注：　本資料に記載されている内容は、英文原本の発行時の情報に基づいています。ただし、ディプロマプログラムの概要を説明している「ディプロマプログラムとは」のセクションに限り、日本語版刊行時現在の新たな情報が反映されています。

非営利教育財団 国際バカロレア機構
（International Baccalaureate Organization）
15 Route des Morillons, 1218 Le Grand-Saconnex, Geneva, Switzerland

発行所
International Baccalaureate Organization (UK) Ltd
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate
Cardiff, Wales CF23 8GL, United Kingdom

ウェブサイト：www.ibo.org

ＩＢの使命

IB mission statement

国際バカロレア（ＩＢ）は、多様な文化の理解と尊重の精神を通じて、より良い、より平和な世界を築くことに貢献する、探究心、知識、思いやりに富んだ若者の育成を目的としています。

この目的のため、ＩＢは、学校や政府、国際機関と協力しながら、チャレンジに満ちた国際教育プログラムと厳格な評価の仕組みの開発に取り組んでいます。

ＩＢのプログラムは、世界各地で学ぶ児童生徒に、人がもつ違いを違いとして理解し、自分と異なる考えの人々にもそれぞれの正しさがあり得ると認めることのできる人として、積極的に、そして共感する心をもって生涯にわたって学び続けるよう働きかけています。

IBの学習者像

すべてのIBプログラムは、国際的な視野をもつ人間の育成を目指しています。人類に共通する人間らしさと地球を共に守る責任を認識し、より良い、より平和な世界を築くことに貢献する人間を育てます。

IBの学習者として、私たちは次の目標に向かって努力します。

探究する人
私たちは、好奇心を育み、探究し研究するスキルを身につけます。ひとりで学んだり、他の人々と共に学んだりします。熱意をもって学び、学ぶ喜びを生涯を通じてもち続けます。

知識のある人
私たちは、概念的な理解を深めて活用し、幅広い分野の知識を探究します。地域社会やグローバル社会における重要な課題や考えに取り組みます。

考える人
私たちは、複雑な問題を分析し、責任ある行動をとるために、批判的かつ創造的に考えるスキルを活用します。率先して理性的で倫理的な判断を下します。

コミュニケーションができる人
私たちは、複数の言語やさまざまな方法を用いて、自信をもって創造的に自分自身を表現します。他の人々や他の集団のものの見方に注意深く耳を傾け、効果的に協力し合います。

信念をもつ人
私たちは、誠実かつ正直に、公正な考えと強い正義感をもって行動します。そして、あらゆる人々がもつ尊厳と権利を尊重して行動します。私たちは、自分自身の行動とそれに伴う結果に責任をもちます。

心を開く人
私たちは、自己の文化と個人的な経験の真価を正しく受け止めると同時に、他の人々の価値観や伝統の真価もまた正しく受け止めます。多様な視点を求め、価値を見いだし、その経験を糧に成長しようと努めます。

思いやりのある人
私たちは、思いやりと共感、そして尊重の精神を示します。人の役に立ち、他の人々の生活や私たちを取り巻く世界を良くするために行動します。

挑戦する人
私たちは、不確実な事態に対し、熟慮と決断力をもって向き合います。ひとりで、または協力して新しい考えや方法を探究します。挑戦と変化に機知に富んだ方法で快活に取り組みます。

バランスのとれた人
私たちは、自分自身や他の人々の幸福にとって、私たちの生を構成する知性、身体、心のバランスをとることが大切だと理解しています。また、私たちが他の人々や、私たちが住むこの世界と相互に依存していることを認識しています。

振り返りができる人
私たちは、世界について、そして自分の考えや経験について、深く考察します。自分自身の学びと成長を促すため、自分の長所と短所を理解するよう努めます。

この「IBの学習者像」は、IBワールドスクール（IB認定校）が価値を置く人間性を 10 の人物像として表しています。こうした人物像は、個人や集団が地域社会や国、そしてグローバルなコミュニティーの責任ある一員となることに資すると私たちは信じています。

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

International Baccalaureate® | Baccalauréat International® | Bachillerato Internacional®

目次

本資料の目的

本資料は、「数学ＨＬ」を学校で計画、指導、評価するための手引きです。「数学ＨＬ」の担当教師を対象としていますが、生徒や保護者に「数学ＨＬ」について説明する際にも、ご活用ください。

本資料は、オンラインカリキュラムセンター（ＯＣＣ）の教科のページで入手できます。ＯＣＣ（http://occ.ibo.org）は、パスワードで保護されたＩＢのウェブサイトで、ＩＢの教師をサポートする情報源です。また、本資料はＩＢストア（http://store.ibo.org）で購入することもできます。

その他のリソース

教師用参考資料や科目レポート、内部評価のガイダンス、評価規準の説明といったその他のリソースも、ＯＣＣで取り扱っています。試験問題例とマークスキーム（採点基準）はＩＢストアで取り扱っています。

ＯＣＣでは、他の教師が作成したり、活用している教育リソースについて情報を得ることができますので、ご活用ください。教師たちによりウェブサイトや本、ビデオ、定期刊行物、指導案などの役立つリソースも提供されています。

2014年 第 1 回試験

はじめに

ディプロマプログラムとは

ディプロマプログラム（ＤＰ）は16歳から19歳までの大学入学前の生徒を対象とした、綿密に組まれた教育プログラムです。幅広い分野を学習する２年間のプログラムで、知識豊かで探究心に富み、思いやりと共感する力のある人間を育成することを目的としています。また、多様な文化の理解と開かれた心の育成に力を入れており、さまざまな視点を尊重し、評価するために必要な態度を育むことを目指しています。

ＤＰのプログラムモデル

ＤＰは、６つの教科（グループ）が中心となる核（「コア」）を取り囲んだ形のモデル図で示すことができます（図１参照）。ＤＰでは、幅広い学習分野を同時並行して学ぶのが特徴で、生徒は「言語と文学」（グループ１）と「言語の習得」（グループ２）で現代言語を計２言語（または現代言語と古典言語を１言語ずつ）、「個人と社会」（グループ３）から人文または社会科学を１科目、「理科」（グループ４）から１科目、「数学」（グループ５）から１科目、そして「芸術」（グループ６）から１科目を履修します。 多岐にわたる分野を学習するため、学習量が多く、大学入学に向けて効果的に準備できるようになっています。生徒は各教科から柔軟に科目を選択できるため、特に興味のある科目や、大学で専攻したいと考えている分野の科目を選ぶことができます。

図１

ＤＰのプログラムモデル

科目の選択

生徒は、６つの教科からそれぞれ１科目を選択します。ただし、「芸術」から１科目選ぶ代わりに、他の教科で２科目選択することもできます。通常３科目（最大４科目）を上級レベル（ＨＬ）、その他を標準レベル（ＳＬ）で履修します。ＩＢでは、ＨＬ科目の学習に240時間、ＳＬ科目の学習に150時間を割りあてることを推奨しています。ＨＬ科目はＳＬ科目よりも幅広い内容を深く学習します。

いずれのレベルにおいても、さまざまなスキルを身につけますが、特に批判的（クリティカル）な思考と分析に重点を置いています。各科目の修了時に、学校外で実施されるＩＢによる外部評価で生徒の学力を評価します。また、多くの科目で、科目を担当する教師が評価する課題（コースワーク）を課しています。

プログラムモデルの「コア」

ＤＰで学ぶすべての生徒は、プログラムモデルの「コア」を形づくる次の３つの必修要件を履修します。「知の理論」（ＴＯＫ：theory of knowledge）では、批判的思考（クリティカルシンキング）に取り組みます。具体的な知識について学習するのではなく、知るプロセスを探究するコースです。「知識の本質」について考え、私たちが「知っている」と主張することを、いったいどのようにして知るのかを考察します。具体的には、「知識に関する主張」を分析し、知識の構築に関する問いを探究するよう生徒に働きかけていきます。ＴＯＫの目的は、共有された「知識の領域」の間のつながりを重視し、それを「個人的な知識」に結びつけることで、生徒が自分なりのものの見方や、他人との違いを自覚できるよう促していくことにあります。

「創造性・活動・奉仕」（ＣＡＳ：creativity, activity, service）は、ＤＰの中核です。「ＩＢの使命」や「ＩＢの学習者像」の倫理原則に沿って、生徒が自分自身のアイデンティティーを構築するのを後押しします。ＣＡＳでは、ＤＰの期間を通じて、アカデミックな学習と同時並行して多岐にわたる活動を行います。ＣＡＳは、創造的思考を伴う芸術などの活動に取り組む「創造性」（creativity）、健康的なライフスタイルの実践を促す身体的活動としての「活動」（activity）、学習に有益であり、かつ無報酬で自発的な交流活動を行う「奉仕」（service）の３つの要素で構成されています。ＣＡＳは、ＤＰを構成する他のどの要素よりも、「多様な文化の理解と尊重の精神を通じて、より良い、より平和な世界を築く」という「ＩＢの使命」に貢献しているといえるかもしれません。

「課題論文」（ＥＥ：extended essay）では、生徒は、関心のあるトピックの個人研究に取り組み、研究成果を 4000 語（日本語の場合は 8000 字）の論文にまとめます。ＥＥには、世界を対象に学際的な研究を行う「ワールドスタディーズ」として執筆されるものも含まれます。生徒は、履修しているＤＰ科目から１科目（「ワールドスタディーズ」の場合は２科目）を選び、対象とする研究分野を定めます。また、ＥＥを通じて大学で必要とされるリサーチスキルや記述力を身につけます。研究は、正式な書式で構成された論文に

まとめ、選択した科目にふさわしい論理的で一貫した形式で、アイデアや研究結果を伝えます。高いレベルのリサーチスキル、記述力、創造性を育成し、知的発見を促すことを目的としており、担当教員の指導のもと、生徒が、自分自身で選択したトピックに関する研究に自立的に取り組む機会となっています。

「指導の方法」と「学習の方法」

ＤＰでの「指導の方法」（approaches to teaching）と「学習の方法」（approaches to learning）は、熟慮されたストラテジーやスキル、態度として、指導や学習の場に浸透しています。「指導の方法」も「学習の方法」も、「ＩＢの学習者像」に示されている人物像と本質的に関連しています。そして、生徒の学習の質を高めると同時に、ＤＰの最終評価やその先の学びのための礎をつくります。ＤＰでの「指導の方法」と「学習の方法」には、次のようなねらいがあります。

- 学習内容を教えるだけでなく、学習者を導く存在としての教師のあり方を支援する。
- 生徒の有意義で体系的な探究と、批判的思考や創造的思考を促すため、教師がファシリテーターとしてより効果的なストラテジーを立てられるよう支援する。
- 各教科のねらい（科目別に掲げる目標以上のもの）と、それぞれの知識の関連づけ（同時並行的な学習）の両方を推進する。
- 生徒が卒業後も積極的に学び続けるために、さまざまなスキルを系統的に身につけるよう奨励する。また生徒が良い成績を得て大学に進学できるよう支援すると同時に、大学在学中の学業の成就や卒業後の成功に向けて準備する。
- ＤＰでの生徒の体験の一貫性と関連性をよりいっそう高める。
- 理想主義と実用主義が融合したＤＰの教育ならではの本質に対して、学校の理解を促進する。

５つの「学習の方法」（思考スキル、社会性スキル、コミュニケーションスキル、自己管理スキル、リサーチスキルの各スキルを高める）と、６つの「指導の方法」（探究を基盤とした指導、概念に重点を置く指導、文脈化された指導、協働に基づく指導、生徒の多様性に応じて差別化した指導、評価を取り入れた指導）には、ＩＢの教育を支える重要な価値観と原則が含まれています。

「ＩＢの使命」と「ＩＢの学習者像」

ＤＰでは、「ＩＢの使命」と「ＩＢの学習者像」に示された目的の達成に向かって、生徒たちが必要な知識やスキル、態度を身につけられるよう働きかけます。ＤＰにおける「指導」と「学習」は、ＩＢの教育理念を日々の実践において具現化したものです。

学問的誠実性

ＤＰにおける「学問的誠実性」（academic honesty）は、「ＩＢの学習者像」の人物像を通じて示されている価値観と振る舞いに則しています。学問的誠実性は、指導、学習、そして評価において、各自が誠実で公正であることを促し、他人とその成果物の権利を尊重することを奨励します。また、すべての生徒は学習を通じて身につけた知識や能力を示す機会を等しく得ることが保証されています。

評価のための課題（コースワーク）を含むすべての学習成果物は生徒本人が取り組んだものでなければなりません。学習成果物は生徒自身の独自のアイデアに基づくものであり、他人のアイデアや成果物を用いる場合は出典を明示しなければなりません。教師が課題について生徒に指導する場合や、生徒同士の協働作業を要する評価課題に取り組む際には、必ず、ＩＢが定めるその教科のためのガイドラインを順守しなければなりません。

ＩＢおよびＤＰにおける学問的誠実性について、より詳しくはＩＢ資料『学問的誠実性』、『ＤＰ：原則から実践へ』、および同（英語版）『*General regulations:Diploma Programme*（総則：ＤＰ編）』を参照してください。ＤＰ科目の学校外で実施されるＩＢによる外部評価（external assessment）と学校内の教師が評価を手がける内部評価（internal assessment）に関連する学問的誠実性の情報は、本資料の中にも記載されています。

出典を明らかにする

国際バカロレア資格（ディプロマ）（ＩＢ資格）取得志願者は、ＩＢに提出する評価課題で引用した情報の出典をすべて明らかにしなければなりません。コーディネーターと教師は、このことに留意する必要があります。以下にこの要件について説明します。

ＩＢ資格取得志願者は、さまざまな媒体を用いた評価課題をＩＢに提出します。その中には、出版物または電子情報として公表された視聴覚資料、文章、図表、画像、データなどの引用が含まれている場合があります。志願者は、他人の成果物やアイデアを用いる場合、参考文献目録の書式として標準的とされる一定の書式に従い、出典を明示しなければなりません。志願者が出典の明示を怠った場合、ＩＢは規則違反の可能性があるとして調査を行います。場合によっては、ＩＢ最終資格授与委員会（IB final award committee）による処分の対象となります。

ＩＢは志願者が用いる参考文献目録や本文中の引用の書式については指定せず、志願者の学校の担当者または教師に判断を委ねています。幅広い科目を提供していることや、英語、フランス語、スペイン語の３言語に対応していること、そして多様な参考文献目録の書式があることから、特定の書式を要求することは非合理的かつ制限的です。実際には、ある特定の書式が最も頻繁に使われるかもしれませんが、学校はその科目と使用言語に適した書式を自由に選ぶことができます。その科目のために学校が選ぶ参考文献目録の書式にかかわらず、著者名、発行日、書名、ページ番号などの最低限の情報は明記する必要があります。

志願者は標準的とされる書式を用い、言い換えや要約を含むすべての参考資料の出典を一貫した書式で明示することが求められます。文章執筆の際、生徒は引用符（または、字下げなどのその他の方法）を用いて自分自身の言葉と他人の言葉を明確に区別し、適切な形で引用を示して参考文献目録に明記してください。電子情報を引用した場合、参考文献目録にアクセス日を明記してください。志願者に期待されているのは、参考文献目録の作成の完璧さではありません。すべての出典を明らかに示すことが求められているのです。志願者は、自分自身のものではない出版物や電子情報として公表された視聴覚資料、文章、図表、画像、データなどもすべて出典を明らかにするように必ず指導を受けなければなりません。この場合も参照・引用の適切な書式を用いてください。

学習の多様性と学習支援の必要な生徒への取り組み

ＩＢ資格取得志願者で学習支援を必要とする生徒に対して、学校は平等に評価を受けるための配慮と妥当な調整を行わなければなりません。配慮や調整は、ＩＢ資料『受験上の配慮の必要な志願者について』および同（英語版）『*Learning diversity in the International Baccalaureate programmes: Special educational needs within the IB programmes*（ＩＢ教育と学習の多様性：ＩＢプログラムにおける特別な教育的ニーズ）』に沿って行わなければなりません。

「数学」の学習

はじめに

数学の特徴を簡潔に言い表した表現はいくつもあります。「矛盾なく定義された知識の体系」、「アイデアの抽象的な体系」、「便利な道具」などはその一例です。多くの人々にとってはおそらく、それらが渾然一体となったものが数学といえるでしょう。しかし、私たちが暮らすこの世界を理解するうえで数学の知識が重要な鍵となることは疑いのない事実です。市販の商品を購入するとき、時刻表を調べるとき、新聞を読むとき、工程時間を計るとき、長さを目測するときなど、数学は生活のさまざまな場面に顔を出します。また大半の人にとっては、それぞれの職業にも数学が関わっています。視覚芸術を職業とする人は遠近法を学ぶ必要があり、音楽家はさまざまなリズムに内在もしくは介在する数学的な関係を捉えなければなりません。経済学者ならば金融取引の動向を把握する必要がある一方、エンジニアは材料の歪みのパターンを考慮しなければなりません。また科学者であれば、自然界に起こる現象を理解するうえで中心的な役割を担う言語として数学を捉えるでしょう。そのほか、数学の論理的な手法がもたらす難題を楽しむ人、数学的論証が与える知的な刺激を味わう人、数学を美的経験と捉える人もいれば、中には哲学の土台とすら考える人もいます。このように数学が私たちの生活に広く浸透していることに加え、数学とその他の学問分野とのあらゆる学際的なつながりを考えるならば、ディプロマプログラム（ＤＰ）を履修する生徒に対して数学を必修教科として課すことは、いたって当然だといえるでしょう。

「数学」の各科目について

個々の生徒のニーズ、関心の対象、および能力はそれぞれ異なります。この点を考慮して、ＤＰの「数学」には４種類の科目が用意されています。これらの科目の対象となる生徒は、数学そのものを深く掘り下げて学習したい生徒や、数学に関連した分野への興味を追求するため数学への理解を深めたい生徒、数学への理解をある程度深めると同時に他の教科への数学的なアプローチをもっとよく理解できるようになりたい生徒、自らの学習や日常生活と数学との関わりをよく認識できていない生徒などさまざまです。各科目は、特定の生徒集団のニーズに対応することを念頭に構成されています。そのため、個々の生徒にとって最も適切な科目が選択されるよう十分に配慮することが必要です。

科目の選択に際しては、以下の点を考慮するよう個々の生徒を指導します。

- 生徒本人の数学の学力と、その生徒が学習成果を上げることが可能な数学のタイプ

・生徒本人の数学に対する関心と、その生徒が強い関心をもち続けられそうな数学の分野
・ＤＰの枠組みの中でその生徒が選択した他の科目
・生徒本人の学修計画（特に、将来学びたい科目）
・生徒本人が希望する職業

教師は、科目の選択を手助けするとともに生徒に助言を与えることが求められます。

数学スタディーズＳＬ

「数学スタディーズＳＬ」は、標準レベル（ＳＬ）の内容のみを扱う科目です。レベルの位置づけは「数学ＳＬ」と同等ですが、対応するニーズは異なります。この科目では数学を応用することに重点が置かれ、統計的手法の学習に最も多くの時間があてられます。対象となるのは、数学に関する予備知識や能力がさまざまなレベルの生徒たちです。生徒はこの科目を通じて、重要な概念や手法を学ぶと同時に、数学の多彩なトピックについて理解を深めることができます。また、さまざまな状況設定の下で問題を解く能力や、より精錬された数学的推論を発達させる能力を身につけることができるほか、批判的思考の力を高めることも可能です。さらに個別的な課題では、データの収集、分析、評価などの個人研究を基に課題レポートの作成に取り組みます。この科目を履修する生徒は主に、社会科学、人文科学、語学、芸術といった方面を進路として考えています。そうした生徒には、「数学スタディーズＳＬ」の中で学習した統計学や論理的な推論を、将来の研究において必要とする機会があるかもしれません。

数学ＳＬ

「数学ＳＬ」は、数学の基本的な概念に関する知識がすでにあり、かつ簡単な数学的手法を正しく応用するための技能を備えた生徒を対象としたものです。この科目を履修する生徒の多くは、将来、化学や経済学、心理学、経営学といった分野を専攻するのに備えて、数学の予備知識が一定程度必要になることを念頭に置いていると考えられます。

数学ＨＬ

「数学ＨＬ」は、数学に関する予備知識が豊富であり、かつ優れた解析技能や専門的技能を幅広く身につけた生徒を対象としたものです。履修者の大半は、将来、大学で数学そのもの、または物理学や工学、応用科学など数学を扱う比重が大きい学科を専攻することを希望していると考えられます。ただし、中には数学に強い関心があり、数学の難題に挑戦することや問題に取り組むことに楽しみを覚えるという理由でこの科目を履修する生徒もいるでしょう。

発展数学ＨＬ

「発展数学ＨＬ」は、上級レベルの内容のみを扱う科目です。数学に関する予備知識がきわめて豊富で、優れた解析技能や専門的技能を幅広く身につけており、なおかつ数学に対する関心が非常に強い生徒が対象となります。履修者の多くは、将来、大学で数学そのもの、または数学を扱う比重が大きい学科において、数学を研究することを希望していると考えられます。この科目は、生徒が数学のさまざまな分野について深く学ぶと同時に、数学の実用性についても捉えることができるよう意図されています。この科目を履修する生徒は、「数学ＨＬ」も履修することが推奨されます。

注：「数学ＨＬ」は、大学で数学そのもの、または物理学や工学、応用科学など数学を扱う比重が大きい学科を専攻しようと考えている生徒のための典型的な科目です。必ずしも「発展数学ＨＬ」を履修する必要はありません。「発展数学ＨＬ」は、数学に対する才能や関心が特に高い生徒を対象とした選択科目です。数学をより広く深く学習することはできますが、数学を専攻するうえで必須の科目ではありません。

「数学ＨＬ」について

「数学ＨＬ」では、数学の重要な概念を、わかりやすい、論理的一貫性のある、厳密な形で習得することに重点が置かれています。そしてそれを実現するのは、バランスに十分配慮した方法です。生徒は、自らがもつ数学の知識を駆使して、種々の意義深い状況設定のもとで問題を解くことが奨励されます。各トピックの説明は、結果の正当性を示す根拠や結果の証明を中心に進めることが必要です。この科目を履修する生徒は、数学的な形式や構造に対する洞察力を積極的に身につけようとする姿勢に加え、別々のトピックの領域に現れる概念同士の関連性を理解するための素養が求められます。また生徒には、学習環境が変わっても数学の学力を伸ばすことができるよう、それに必要な技能の習得を促すことも必要です。

一方、数学に対する自立的な学習姿勢を身につける機会として、生徒には内部評価の対象である「数学探究」（exploration）が課されます。生徒は、吟味された方法でさまざまな数学的活動に取り組み、種々の数学的アイデアを探究することが奨励されます。またこの「数学探究」を通して生徒は、筆記試験のような時間的制約を受けることなく数学に取り組むことができるほか、数学的アイデアを伝えるために必要な技能を習得することもできます。

この科目では、生徒に対してかなりの学習量が課されます。生徒は、数学に関する幅広いトピックをさまざまな方法により、またそれぞれの理解度に応じて学習することが求められます。そのため、もう少しゆとりのある環境で数学を学習したいという生徒は、標準レベルの「数学ＳＬ」か「数学スタディーズＳＬ」のいずれかを選択することが推奨さ

れます。一方、より厳しい要求が課される科目を希望する生徒は、「数学ＨＬ」のほかに「発展数学ＨＬ」の履修を検討するとよいでしょう。

事前の学習経験

数学は積み重ねの教科です。当然ながら、ＤＰの数学科目を履修する生徒の大半は、すでに10年以上にわたって数学を学習してきているでしょう。これまでに学習したトピックは多岐にわたり、指導や学習の方法もさまざまでしょう。そのため生徒は「数学ＨＬ」の学習を開始する時点で、すでに幅広い技能や知識を身につけています。生徒の多くは、算術、代数、幾何、三角法、確率・統計について、かなりの予備知識があると考えられます。中には、普段から探究的な学習に取り組み、数学においてまとまったレポートなどを仕上げた経験のある生徒もいるかもしれません。

シラバスの冒頭には、「数学ＨＬ」を履修するにあたって、あらかじめ学習しておくべきとされるトピックの一覧が記載されています。この一覧の中には一部の生徒にとってなじみのないトピックが含まれることも考えられますが、逆にそれらの生徒にとって学習済みのトピックがシラバスの方に含まれている可能性もあります。教師は、一部の生徒になじみのないトピックを授業計画に組み入れるようにしてください。

ＭＹＰとの接続

ＤＰの数学科目を履修するにあたって事前に学習しておくべきトピックは、中等教育プログラム（ＭＹＰ）の「数学」の指導の手引きにも併記されています。ＤＰの数学科目における指導や学習の方法は、ＭＹＰでの方法が土台となっています。具体的には、調査や探究のほか、さまざまな評価方法が含まれます。

ＯＣＣ上にあるＤＰの「数学」のページからは、ＩＢ資料（英語版）『*Mathematics: The MYP-DP continuum*（数学：ＭＹＰからＤＰへの一貫教育）』（2010年11月）を入手することができます。この資料は、ＭＹＰの「数学」からＤＰの「数学」への移行方法を明確化する必要があるとするＩＢ認定校からの意見を踏まえたもので、ＭＹＰとＤＰとの整合に焦点をあてています。また、ＭＹＰの「数学」とＤＰの「数学」の類似点および相違点についても強調されており、教師にとっては有益な資料です。

「数学」と「知の理論」

ＩＢ資料（英語版）『*Theory of knowledge guide*（「知の理論」指導の手引き）』（2006年３月刊）によると、「知るための方法」（ways of knowing）は４種類あるとされますが、いずれの方法も数学の知識を習得するうえで一定の役割を担っているといえます（［**訳注**］2013年刊行の『「知の理論」指導の手引き』では、８つの「知るための方法」が設定されています）。数学の営みは、着想こそ感覚的な認識によってデータから得られるかもしれませんが、その大半を

占めるのは推論です。数学者の中には、数学の主題は言語であり、ある意味では普遍的なものであると主張する人もいます。ただ、数学者が数学の中に美しさを見出すことは確かであって、数学の知識を求める際に感性が強力な推進力となり得ることは間違いないようです。

「知識の領域」（areas of knowledge）の１つとして数学が提供しているのは、他の学問分野にはおそらく見られないような確実性だと考えられます。それは数学がもつ「純粋さ」と関わりがあるのかもしれません。数学は、その「純粋さ」ゆえに時として現実からかけ離れているようにも見えますが、この世界に関する重要な知見をもたらしてきたこともまた事実です。科学技術の分野では、数学を駆使することがその発展の原動力となってきました。

世界を理解し変革するための手段として強力であることは疑い得ないにせよ、数学は結局のところ、難解な事象です。数学を学習する者は誰もが、ある根本的な疑問に突きあたります。それは、数学の知識が人間の思考とは独立して実在するのかどうかという疑問です。数学の知識は、もともとそこにあって「発見されるのを待っている」のでしょうか、それとも人間が創造したものなのでしょうか。

「知の理論」（ＴＯＫ）と「数学」に関わるさまざまな問題に生徒の関心を引きつけるだけでなく、「数学」や「ＴＯＫ」の授業の中で生徒がこうした問題を自ら提起できるよう働きかけることが必要です。その中には、上述のような主張に対する疑問も含まれます。ＴＯＫに関わる問題については、シラバスの「関連事項」の欄にその具体例が記載されています。教師は、『「知の理論」指導の手引き』の「知識の領域」で取り上げられている問題について論じてもよいでしょう。

数学とその国際的側面

数学はある意味で世界共通の言語です。表記法には若干の違いがありますが、それを別にすれば世界のどの国の数学者もそれぞれの分野でお互いにコミュニケーションをとることができます。数学は政治や宗教、国籍を超越した存在ですが、歴史を振り返ってみると、巨大文明ではその繁栄の一端を数学者が担っていたといえます。数学者がいればこそ、複雑な社会構造や建造物を生み出し、それを維持することができたのです。

情報通信技術の開発が進歩を遂げたのは最近のことですが、数学の情報やアイデアがグローバルに交換されることは新しい事象ではなく、それが数学の発展に重要な役割を果たしてきました。実際、現代数学の基礎を成す概念の中には、はるか昔にアラビア、ギリシャ、インド、中国などの文明で芽生えたものが数多く存在します。教師は、ウェブサイトの年表を用いて、さまざまな文明がもたらした数学上の成果を紹介するとよいでしょう。これらの年表では、数学的な事柄だけでなく、関連する数学者の人物像や彼らが残した業績の歴史的背景にも言及されています。そのため、数学の人間的側面や文化的側面についても理解を深めることができます。

日常の世界における科学技術の重要性は指摘するまでもありませんが、数学が担っている重要な役割は十分に認識されているとはいえません。数学は科学にとっての言語であり、科学技術の発達を広く支えています。その好例がデジタル革命です。デジタル革命によっていま世界は変容しつつありますが、そのすべての基盤となるのが数学の２進法なのです。

現在、数学の普及を促進する国際的な組織は多数存在します。生徒は、数学の国際的な組織が運営しているさまざまなウェブサイトにアクセスして、数学の国際的側面に対する理解をより深めるとともに、数学を取り巻くグローバルな問題に取り組むことが推奨されます。

「**国際的な視野**」に関連したグローバルな問題については、その具体例がシラバスの「関連事項」の欄に記載されています。

ねらい

「数学」（グループ５）のねらい

「数学」（グループ５）に属する科目はいずれも、以下を学習のねらいとしています。

1. 数学を楽しむとともに、数学のもつ優雅さや力を感得する。
2. 数学の原理と本質に対する理解を深める。
3. さまざまな文脈の中で自分の考えを相手に自信をもって明確に伝えられるようにする。
4. 論理的、批判的、創造的な思考力とともに、問題解決に取り組む根気と粘り強さを養う。
5. 抽象化や一般化を実際に行うとともに、その能力を高める。
6. 異なる状況や他の知識の領域、将来の発展に技能を応用または転移（transfer）できるようにする。
7. テクノロジーの発達と数学の発展が、互いにどのように互いに影響し合ってきたかを捉える。
8. 数学者の業績や数学の応用によって生じる道徳的、社会的、および倫理的な影響を捉える。
9. 数学がもつ普遍性や、その多文化的視点、および歴史的視点を認識することにより、数学の国際的側面を捉える。
10. 他の学問分野に対して数学がどのように貢献しているか、また「知の理論」（ＴＯＫ）における「知識の領域」の１つとして数学がどのように貢献しているのかを捉える。

評価目標

ノンルーティンの問題やオープンエンドの問題、現実世界の問題を含む問題解決は、数学の学習の中心であり、広い範囲の状況における数学的な技能や概念を習得することにもつながります。ＤＰの「数学ＨＬ」を履修した生徒は、以下の各項目についてその習熟度を具体的に示すことが求められます。

1. **知識と理解**　自分にとってなじみがあるかないかを問わず、さまざまな文脈の中で、数学に関する事実や概念、手法を頭に思い浮かべ、適切なものを選び、活用する。
2. **問題解決**　現実的な文脈および抽象的な文脈の中で、問題を解決するために、数学の技能や結果、モデルに関する知識を思い浮かべ、適切なものを選び、活用する。
3. **コミュニケーションと解釈**　一般的な現実の文脈を数学の文脈に置き換え、その文脈を説明し、紙と鉛筆またはテクノロジーを使って、数学的な図式やグラフを描いたり、略図にしたり、作図したりして、解法、解答、および結論を標準化された表記法を用いて記録する。
4. **テクノロジー**　新しいアイデアを探究したり、問題を解決したりするために、テクノロジーを正確に、適切に、かつ効果的に使用する。
5. **推論**　正確な記述、論理的な演繹および推論の使用を通じて、数式の演算によって数学的議論を構成する。
6. **探究的方法**　それまで自分にあまりなじみのなかった抽象的な状況および現実的な状況について、情報を整理して分析し、予想を立て、結論を導き、その妥当性を検証するなど、詳細な調査を行う。

シラバスの概要

シラバスの構成	授業時間 H L
すべてのトピックが必修です。生徒は、シラバスにある各トピックにおいて、この手引きに記載されているサブトピックをすべて学習する必要があります。また、「事前に学習すべきトピック」に記載されているトピックになじんでいることも求められます。	
トピック 1 代数	30
トピック 2 関数と方程式	22
トピック 3 三角関数と三角法	22
トピック 4 ベクトル	24
トピック 5 確率・統計	36
トピック 6 微分・積分	48
「選択項目」のシラバスの構成 生徒は、次のうち、いずれか１つのトピックにおいて、「シラバスの詳細」に記載されているサブトピックをすべて学習する必要があります。 **トピック 7** 確率・統計 **トピック 8** 集合・関係・群 **トピック 9** 微分・積分 **トピック 10** 離散数学	48
「数学探究」 「数学ＨＬ」における内部評価は、生徒が個別に取り組む「数学探究」を対象に行われます。「数学探究」では、数学の１つの分野について研究を行い、その成果を課題レポートにまとめます。	10
総授業時間数	**240**

「数学ＨＬ」の指導の方法・学習の方法

ＤＰの「数学ＨＬ」の学習全般を通じて、生徒が数学という学問分野の方法論や実践について理解を深めることができるよう働きかけることが求められます。そして、**「数学的探究」「数学的モデリングと応用」「テクノロジーの利用」**という３つの過程を適切に導入することが必要です。これらの過程は「数学ＨＬ」の学習全般に用いられるべきであり、各過程を別々に扱うべきではありません。

数学的探究

「ＩＢの学習者像」では、実験、課題設定、発見を通じた学習が奨励されています。通常、ＩＢの授業における生徒は、単に指示に従うのではなく、学習活動に主体的に参加することで、数学を学習するべきです。そのため教師は、数学的探究を通じて学習する機会を生徒に提供する必要があります。図２は、この方法を図式化したものです。

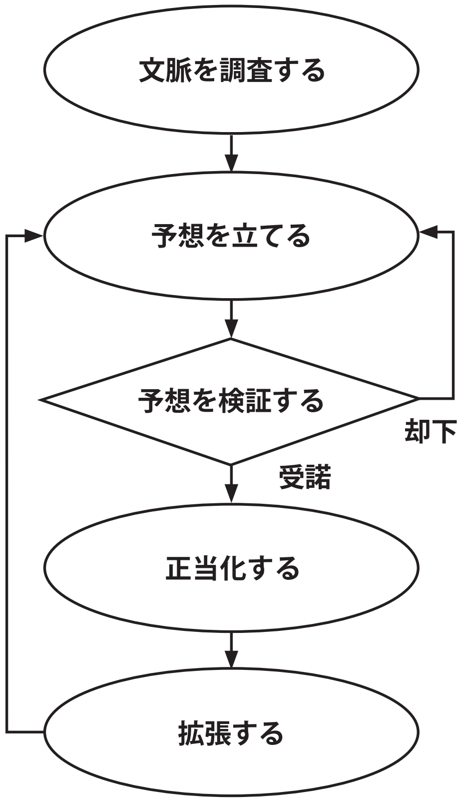

図２

数学的モデリングと応用

生徒は、現実世界の問題を解決するために、数学を用いることができるべきです。数学的モデリングの過程を生徒に推奨することが、こうした機会を提供することになります。生徒は、モデルを開発し、適用するとともに、批判的に分析します。図３は、その方法を図式化したものです。

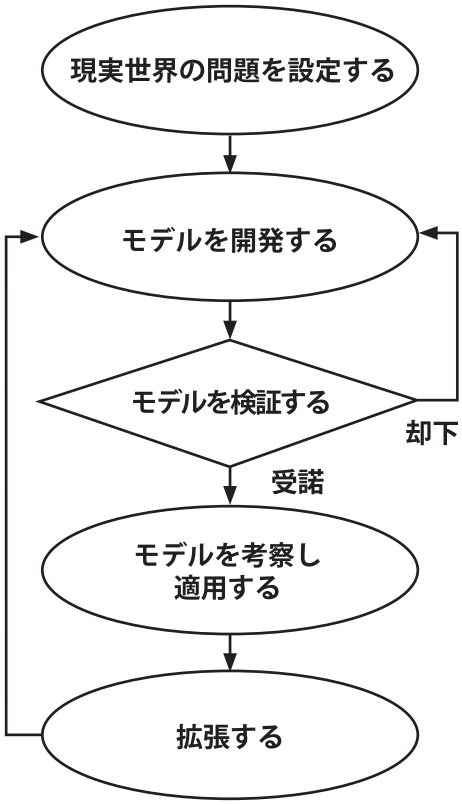

図３

テクノロジー

テクノロジーは、数学の指導や学習を進めるうえで強力な道具です。テクノロジーを利用すれば、物事を視覚化しやすくなり、生徒が数学的な概念を理解する手助けにもなります。また、データの収集や記録、整理、分析にも役立つほか、生徒はより幅広い問題状況に取り組むことができるようになります。テクノロジーの利用は、生徒が考察し、推論し、問題を解決し、意思決定をするような、興味のある問題の文脈における生徒の取り組みの可能性を広げるのです。

教師は、**「数学的探究」「数学的モデリングと応用」「テクノロジーの利用」**というつながり合ったテーマを相互に結びつけるにあたって、最初は十分な指導を行い、その後段階を追って、生徒がより自立的に探究と考察を行えるよう導いていくことが必要です。ＩＢの生徒は、数学の言語を使ったコミュニケーション能力を高めるよう努めなければなりませ

ん。そのため教師には、生徒が失敗を恐れず新たな試みに挑戦しやすい学習環境をつくり出すことが求められます。

教師は、生徒が学習している数学の内容を、他の教科や現実の世界、中でも関連性の強いトピックや生徒の関心が高いトピックに関連づけて説明することが推奨されます。また、日常の問題や疑問を授業に取り入れることで、生徒の意欲をかき立てるとともに、学習の題材と日常との関わりを生徒に見失わせないようにすることも必要です。シラバスの「関連事項」の欄にはその提案が記載されています。「数学探究」は、現実世界における数学の有用性、現実世界と数学との関連性、および現実世界において数学が登場する場面について詳しく研究するためのもので、この科目のもう１つの特色を成しています。そこで重視されるのは、数学的な表現形式（例えば、公式、図式、グラフなど）とそれに付随する説明とを駆使したコミュニケーションです。そのためＤＰの「数学」では、特に、モデリング、調査、考察、個人の主体的な取り組み、および数学的コミュニケーションに重点を置いて授業を進める必要があります。

ＤＰ科目の「指導の方法（アプローチ）」に関する詳細については、ＩＢ資料『ＤＰ：原則から実践へ』（2014年６月刊）を参照してください。教師を支援するため、ＯＣＣにはさまざまな資料が用意されています。また、ＩＢのウェブサイトには、専門性を高めるための教員研修の詳細が収載されています。

シラバスの形式

- **内容**　この欄には、各トピックで扱われるサブトピックが列記されています。
- **詳細**　この欄には、「内容」の欄に列記されている個々のサブトピックについての詳細が記載されています。これが、最終試験の内容を明確にしています。
- **関連事項**　この欄には、「数学ＨＬ」のねらいに関連する有用な事柄に加え、議論のための提案、現実世界の具体例、さらなる調査のためのアイデアなどが記載されています。**これらの提案は、単にサブトピックの紹介や説明のための手引きであって、すべてを網羅したものではありません。**「関連事項」の欄には、次のような項目があります。

応用	現実世界の具体例や、関連するＤＰの他教科について
ねらい８	サブトピックの道徳的、社会的、倫理的な意図について
国際的な視野	国際的な視野との関連性
「知の理論」（ＴＯＫ）	議論のための提案

「関連事項」の欄の中には、参照先として他教科の「指導の手引き」にあるシラバスが指定されている箇所がありますが、これらの参照先は2012年現在刊行されている版の手引きであることに留意してください。

シラバスに関する留意点

・シラバスの中に公式が記載されるのは、曖昧さが生じるおそれのある箇所に限定されます。「数学ＨＬ」で必要な公式についてはすべて「数学公式集――数学ＨＬ・発展数学ＨＬ」に記載されています。
・「テクノロジー」という表現は、利用可能なさまざまな電卓またはコンピューターに対して使用されます。ただし、試験での使用が許可されるテクノロジーについては制約があります。詳しくは、該当する資料を参照してください。
・「解析」および「解析的方法」という表現は原則として、テクノロジーを利用しない方法を指す場合に用いられます。

授業計画

シラバスに記載された６つのトピックすべてと、「選択項目」のトピックの中のいずれか１つを指導する必要がありますが、必ずしも「指導の手引き」に記載されている順序どおりに指導を行う必要はありません。教師は、生徒のニーズに対応できるように授業計画を組み立てるとともに、「事前に学習すべきトピック」に記載されている項目を必要に応じてその授業計画の中に組み入れることが求められます。

「数学探究」の取り組み

「数学探究」（mathematical exploration）に関わる取り組みはすべて、授業時間の中に組み入れることが必要です。その詳しい方法については、内部評価に関するセクションおよび教師用参考資料に記載されています。

時間配分

上級レベル（ＨＬ）の科目では、授業時間として240時間を割りあてることが推奨されます。「数学ＨＬ」の場合、「数学探究」の取り組みに10時間を割りあてることになっています。この「指導の手引き」に示されている時間配分はおおよその目安であり、シラバスの各項目の指導に割りあてられる残りの230時間をどのように配分するかを一例として示したものです。ただし、それぞれのトピックに対し厳密にどれだけの時間を割りあてるのかについては、各生徒の予備知識や準備の程度などさまざまな要素に左右されます。そのため教師は、生徒のニーズに応じて時間調整を行うことが必要です。

電卓の使用

生徒には、履修期間中、グラフ電卓を使用することが求められます。その機能要件は技術の進歩に合わせて見直され、各学校には最新の情報が提供されます。教師および学校は、電卓の使用方針に則って電卓が使用されているかを監督しなければなりません。試験で使用が許可される電卓の種類については、その規定がＩＢ資料『ＤＰ手順ハンドブック』に記載されています。その他の詳細情報については、ＩＢ資料（英語版）『*Mathematics HL/SL: Graphic display calculators teacher support material*（数学ＨＬ／ＳＬ：グラフ電卓に関する教師用参考資料）』（2005年５月刊）に記載されているほか、ＯＣＣでも閲覧できます。

ＩＢ資料『数学公式集 ―― 数学ＨＬ・発展数学ＨＬ』

試験の際は、各生徒の手元にこの公式集の書き込みのされていないコピーが１部ずつ用意されていなければなりません。教師は履修開始当初から、生徒がこの公式集の内容に習熟できるよう配慮することが求められます。学校には、この公式集をＩＢＩＳまたはＯＣＣからダウンロードし、誤植がないかをチェックしたうえで、生徒全員分のコピーを用意する責任があります。

教師用参考資料

この「指導の手引き」は、「教師用参考資料」（ＴＳＭ：teacher support material）と併せて活用してください。「教師用参考資料」は、教師を対象とした「数学探究」の概要、計画および評価に関する資料です。また、このほか、試験問題例、マークスキーム（採点基準）などがあります。

指示用語と表記法一覧

試験問題には、ＩＢの表記法および指示用語が何の説明もなく使用されます。そのため教師と生徒は、それらの意味を十分に理解しておくことが必要です。巻末の付録「指示用語の解説」と「表記法一覧」を参照してください。

事前に学習すべきトピック

「事前の学習経験」で述べたように、生徒は全員、数学について豊富な学習経験をもっていますが、その内容は生徒によって異なると考えられます。「数学ＨＬ」の試験では、下記のトピックに関する知識を前提とした問題が出題されるため、「数学ＨＬ」を履修する生徒は、試験に臨むまでに下記のトピックの内容になじんでいることが必要です。また教師は、履修開始時点で下記のトピックの中に生徒になじみのないトピックがある場合には、そのトピックを授業のできるだけ早い段階で取り上げるようにしなければなりません。さらに、生徒がすでに身につけている数学の知識を考慮しながら、「数学ＨＬ」の授業計画を適切に組み立てることも求められます。次の表は、「数学ＨＬ」を修了するうえで、シラバスの内容とともに習得することが必要不可欠な知識をまとめたものです。

なお生徒は、国際単位系（ＳＩ）における長さ、重さ、時間の単位、およびそれらから導出される単位になじんでいることが必要です。

トピック	内容
数	・整数、小数、および分数に関する加減乗除について、計算の順序を含め、自在に行う ・有理数の指数 ・分母の有理化を含む根号を含んだ式の簡略化 ・素数と因数（約数）（最大公約数と最小公倍数を含む） ・相似に関連した比、百分率、および割合の簡単な応用 ・絶対値 $\lvert a \rvert$ の定義と基本的な扱い方 ・概数、小数の近似、および有効数字（誤差の評価を含む） ・標準的な記数法（科学的記数法）による数の表記：$a \times 10^k$（$1 \le a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$）
集合と数	・集合、元、全体集合、空集合、補集合、部分集合、集合の相等、および互いに素である集合の各概念とその記法。集合の演算：和集合と共通集合。交換法則、結合法則、および分配法則。ベン図 ・数の体系：自然数、整数（$\mathbb{Z}$）、有理数（$\mathbb{Q}$）、無理数、実数（$\mathbb{R}$） ・集合の表記法および不等式を用いた数直線上の区間を表現する方法。数直線および集合の表記法を用いて１次不等式の解集合を表現する方法 ・ある集合から別の集合への元の写像、順序対の集合

トピック	内容
代数	・因数分解、展開、平方完成、公式の使用を含む１次式および２次式の変形 ・簡単な公式の置換、値計算、および組み合わせ、他の教科、特に理科で扱う事柄を例として取り上げること） ・一次関数とそのグラフ、傾き、および y 切片 ・簡単な有理式の加法および減法 ・順序関係：$<$, $\leq$, $>$, $\geq$ ・有理数係数の場合も含む一元の方程式および不等式の解法 ・因数分解や平方完成による二次方程式および二次不等式の解法 ・二元一次連立方程式の解法
三角法	・度を単位とする角度の測定、コンパスの方位、直角三角形の三角比、三角形の問題を解くための簡単な応用 ・ピタゴラスの定理とその逆
幾何	・簡単な幾何学的変換：平行移動、対称移動、回転移動、拡大、倍数の概念を含む合同と相似 ・円とその中心、半径、面積、および円周。「円弧」「扇形」「弦」「接線」「弓形」という用語 ・平面図形の周りの長さと面積。三角形および四角形（平行四辺形、ひし形、長方形、正方形、たこ形、および台形を含む）の性質。複合図形。角柱、角錐、球、円柱、円錐の体積、四面体を含む角柱と角錐の分類
座標幾何	・点、直線、平面、および空間に対する次元の概念を含む初等的な平面幾何学、直線を表す方程式 $y = mx + c$、直線の平行性と垂直 $m_1 = m_2$, $m_1 m_2 = -1$ ・ xy 平面： 座標 (x, y)、原点、座標軸、xy 平面における線分の中点と２点間の距離
確率・統計	・記述統計学：生データの収集、度数ヒストグラム、累積度数グラフを含む図表によるデータの表示 ・離散型データおよび連続型データから、平均値、中央値、最頻値、四分位数、範囲、四分位範囲、百分位数などの簡単な統計値を求める方法 ・同様に確からしい事象の確率の計算

シラバス

シラバスの内容

トピック１ ―― 必修項目：代数　30時間

このトピックでは、生徒に代数学の基本的な概念や応用例を紹介することをねらいとします。

	内容	詳細	関連事項
1.1	・等差数列と等差級数、有限な等差級数の和、等比数列と等比級数、有限および無限な等比級数の和 ・シグマの表記法 ・応用	・数列をつくり出す方法や表示する方法はいくつかある（帰納的関数など） ・無限な等比級数については、6.1 の極限の収束と関連づける ・具体例として、複利計算や人口増加などを挙げる	**国際的な視野**　チェスにまつわる言い伝え（セッサ・イブン・ダヘル）。 **国際的な視野**　アリヤバータが「代数の父」とされることもある。アル＝フワーリズミーと比較する。 **国際的な視野**　数学の表記（等差数列の初項や公差など）にはいくつかのアルファベットが使用される。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知る人」。数学の知識は、どの程度、私たちの直観に合致しているだろうか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と世界。一部の数学定数（π，e，ϕ，フィボナッチ数）は、自然現象の中に絶えず姿を現す。このことは、数学の知識について何を意味するか。 （次ページへ続く）

	内容	詳細	関連事項
			（前ページからの続き） **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知る人」。数学的直観は、厳密な証明の足掛かりとしてどのような働きをするか（１から100までの整数の和に関するガウスの方法）。 **ねらい８**　高金利の短期貸付。数学の知識によって、個人から法外な金利を搾取することや、個人を法外な金利から守ることは、どのようにしたら可能か。 **応用**　「物理」7.2、13.2（放射性崩壊と原子核物理学）
1.2	・指数と対数 ・指数法則と対数法則 ・底の変換	・指数と対数は 2.4 でさらに拡張される	**応用**　「化学」18.1、18.2（pHの計算と緩衝溶液） **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と科学の本質。対数は発明されたものか、それとも発見されたものか（このトピックは教師と生徒が「数学の本質」についてじっくり考える機会となる）。

	内容	詳細	関連事項
1.3	・順列、組み合わせを含む数え上げの原理 ・二項定理：$(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ の展開 **以下は必須ではない** – 重複のある順列 – 円順列 – 二項定理の証明	・公式とテクノロジーのどちらを使っても、$\binom{n}{r}$ と ${}^nP_r$ を計算できることが求められる。5.4 と関連づける ・5.6 の二項分布と関連づける	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。パスカルの三角形、数え上げの方法、多項式の係数の間には思いがけない関係がある。この３つを関係づけている根本的な事実は存在するか。 **国際的な視野**　パスカルの三角形の性質は、パスカルが登場するはるか以前からさまざまな文化に知られていた（中国の数学者、楊輝など）。 **ねらい８**　１回の宝くじで抽選券の番号は何通り可能か。またその結果から、大きな数のもつ意味を理解していない人に宝くじを販売する際の倫理について何がいえるか。
1.4	数学的帰納法による証明	複素数、微分、級数の和、整除可能性など幅広いトピックに関連づける	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と科学の本質。数学における帰納法と自然科学における帰納法では、どのような意味の違いがあるか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学における「知識に関する主張」。証明によって、まったく疑いのない知識が得られたといえるか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　知識コミュニティー。証明の妥当性は誰が判断するのか。

	内容	詳細	関連事項
1.5	・複素数：$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ という数、「実部」「虚部」「共役」「絶対値」「偏角」という用語 ・デカルト表示 $z=a+ib$ ・複素数の和、積、および商	・問題を解く際、生徒はテクノロジーを使うことが必要な場合もある	**応用**　電気工学の概念。抵抗とリアクタンスの組み合わせであるインピーダンスや、有効電力と無効電力の組み合わせである皮相電力。これらの組み合わせは $z=a+\mathrm{i}b$ という形で与えられる。 **「知の理論」（TOK）**　数学と「知る人」。「虚」や「複素」という語は、他の語を使った場合よりも概念を難解なものに感じさせてはいないか。 **「知の理論」（TOK）**　数学の本質。「i」は発明されたのか、それとも発見されたのか。 **「知の理論」（TOK）**　数学と世界。 物理の基本法則の多くに「i」が現れるのはなぜだろうか。
1.6	・絶対値と偏角による表示（極座標表示） $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\,\mathrm{cis}\theta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ・複素数平面	・$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ はオイラー表示とも呼ばれる ・複素数の表示形式を変換する能力が求められる ・複素平面はアルガン図とも呼ばれる	**応用**　電気工学の概念。位相角／位相シフト、力率、皮相電力は、極形式の複素量として表される。 **「知の理論」（TOK）**　数学の本質。複素平面は、複素数の幾何学的な表現に使用される前から存在しただろうか。 **「知の理論」（TOK）**　数学と「知る人」。 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$ が美しいといわれることがあるのはなぜか。

	内容	詳細	関連事項
1.7	・複素数のべき乗：ド・モアブルの定理 ・複素数の n 乗根	・$n \in \mathbb{Z}^{+}$についての数学的帰納法による証明	**「知の理論」（ＴＯＫ）** 推論と数学。数学的な推論とは何か。また、数学的な推論において証明はどのような役割をもつか。数学的でない証明の具体例はあるか。
1.8	・実数係数多項式の共役な複素数解	・2.5 および 2.7 と関連づける	
1.9	・解が１つ存在する場合、解が無限個存在する場合、および解が存在しない場合を含む連立一次方程式（最大で３つの変数を含む）の解法	・これらの連立方程式は、例えば消去法のような代数的な方法とテクノロジーを用いた方法のどちらでも解けるようにすること ・解が存在する連立方程式を、「整合」と表現することもある ・連立方程式の解が無限個存在する場合は、一般解を求めなければならないこともある ・4.7 で説明するベクトルと関連づける	**「知の理論」（ＴＯＫ）** 数学、知覚、論理的な説明。より高次元の解を求めることが可能な場合、その空間がわれわれの知覚を超えたところに存在するということを論理的に説明することは可能か。

トピック２ ―― 必修項目：関数と方程式　22時間

このトピックでは、数学全体に共通するテーマとして関数の概念を詳しく説明すること、また関数の手法をさまざまな数学的場面に応用することをねらいとします。このトピックの内容を発展させたり応用したりする場合には、テクノロジーを大いに活用することが望まれます。

	内容	詳細	関連事項
2.1	・関数の概念 $f: x \mapsto f(x)$：定義域、値域、像（値） ・奇関数と偶関数 ・合成関数 $f \circ g$ ・恒等関数 ・１対１関数と多対１関数 ・逆関数 f^{-1}（定義域の制限を含む）、自己逆元関数	 ・$(f \circ g)(x) = f(g(x))$、6.2 と関連づける ・3.4 と関連づける ・6.2 と関連づける	**国際的な視野**　関数の表記法は、17 ～ 18 世紀にさまざまな数学者が発展させた。現在使用されている表記法は、どのような経緯で世界に受け入れられたか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。数学は、形式的な規則に則った記号の操作にすぎないのだろうか。
2.2	・関数のグラフとその式 $y = f(x)$ ・グラフを特徴づける主な要素（最大値および最小値、切片、水平漸近線と垂直漸近線、水平方向および垂直方向の対称性、定義域と値域の範囲）を調べる ・関数 $y = \lvert f(x) \rvert$ および $y = f(\lvert x \rvert)$ グラフ ・$y = f(x)$ のグラフが与えられた場合の $y = \dfrac{1}{f(x)}$ のグラフ	・さまざまな関数をグラフにするために、テクノロジーを使う	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。関数のグラフの学習には、関数を代数的（解析的）に学習するときのような数学的厳密さがあるだろうか。 **応用**　グラフの概略の図示と解釈、「地理」ＳＬ・ＨＬ（地理的技能）、「化学」11.3.1 **国際的な視野**　数学者集団ブルバキの解析的アプローチとマンデルブローの視覚的アプローチとの比較。

	内容	詳細	関連事項
2.3	・グラフの変換：平行移動、拡大、座標軸に対する対称移動 ・$y = x$ に対する鏡像として逆関数のグラフを求める	・3.4 と関連づける。生徒は、代数式および関数のグラフが変換によってどのように変化するのかを認識することが求められる	**応用**　「経済」ＳＬ・ＨＬ 1.1（需要曲線と供給曲線のシフト）
2.4	・有理関数 $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ とそのグラフ ・関数 $x \mapsto a^x$, $a > 0$ とそのグラフ ・関数 $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$ とそのグラフ	・逆数関数は、その特別な場合に該当する ・グラフには２本の漸近線、および切片を書き入れる必要がある ・指数関数と対数関数は互いに逆関数である ・6.2 および e の重要性と関連づける ・2.1、2.2、および 2.3 で説明する概念の応用	**応用**　「地理」ＳＬ・ＨＬ（地理的技能）、「物理」ＳＬ・ＨＬ（放射性崩壊）、「化学」ＳＬ・ＨＬ（活性化エネルギー）、「経済」ＳＬ・ＨＬ 3.2（為替レート）
2.5	・多項式関数とそのグラフ ・因数定理と剰余定理 ・代数学の基本定理	・グラフにおける重複因子の重要性 ・多項式関数の次数と x 切片の個数との関係	

	内容	詳細	関連事項
2.6	・解の公式を使って２次方程式を解く ・判別式 $\Delta = b^2 - 4ac$ を使って、解の種類を判別する ・グラフおよび代数的手法の両方を使って多項式方程式を解く ・多項式方程式のすべての根の和と積 ・対数を使った $a^x = b$ の解法 ・テクノロジーを使ってさまざまな方程式を解く（解析的に解く方法がない方程式も含む）	・方程式の根または関数の零点と呼ぶこともある ・多項式方程式の解法については、1.8 で説明する共役根と関連づける ・多項式方程式 $\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = 0$ の場合 和は $\dfrac{-a_{n-1}}{a_n}$ 積は $\dfrac{(-1)^n a_0}{a_n}$	**応用**　「化学」17.２（化学平衡の法則） **応用**　「物理」2.１（運動学） **応用**　「物理」4.２（単振動におけるエネルギーの変化） **応用**　「物理」（ＨＬのみ）9.１（放物運動） **ねらい８**　さまざまな現象を指して「指数関数的な増加」という表現がよく用いられるが、数学用語のこのような使い方は誤解を招かないだろうか。
2.7	・$g(x) \geq f(x)$ の解法 ・次数が高々３の簡単な多項式については、グラフを使った方法と代数的な方法 ・同様の多項式およびその他の関数については、テクノロジーを使った方法		

トピック３ —— 必修項目：三角関数と三角法　22時間

このトピックでは、三角関数について詳しく説明するとともに、三角法に関する重要な公式を紹介し、三角法を使って三角形問題を解くことをねらいとします。最終試験では、$x \mapsto \sin x^{\circ}$ などの指示が特にない限り、角度の単位は弧度法（ラジアン）を使用します。

	内容	詳細	関連事項
3.1	・円：弧度法（ラジアン）による角度の測定。 ・弧の長さ、扇形の面積	・弧度法では、角度を π の倍数、または小数で表すことができる。6.2 と関連づける	**国際的な視野**　度数法はメソポタミア文明の数学に起源をもつ。時間の単位に分や秒が使われるのはなぜか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知る人」。ラジアンを使うのはなぜか（度数法の恣意性と実数を使う弧度法との対比。正弦関数のグラフの概形にこの２つの単位が与える影響）。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。三角法が直角三角形を基本にしているとすると、90°より大きな角度の三角比はどのように考えるのが合理的か。 **国際的な視野**　「サイン（sine）」の語源 **応用**　「物理」ＳＬ・ＨＬ 2.2（力と力学） **応用**　全地球測位システム（ＧＰＳ）に利用される三角測量。 **国際的な視野**　ピタゴラスはなぜ、音楽と数学を結びつけて研究したのか。 **応用**　電気工学の概念。正弦波電圧の生成。
3.2	・単位円による $\cos\theta$, $\sin\theta$, および $\tan\theta$ の定義 ・0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, およびそれらの倍数の正弦、余弦、および正接の正確な値 ・三角比の逆数 $\sec\theta$, $\csc\theta$, および $\cot\theta$ の定義 ・ピタゴラスの公式：$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$		
3.3	・加法定理 ・２倍角の公式 **以下は必須ではない** －加法定理の証明	・加法定理から２倍角の公式を導く ・θ を求めることなく、三角比の取り得る値を求める（例えば、与えられた $\sin\theta$ の値から $\sin 2\theta$ を求める ）	

（次ページへ続く）

	内容	詳細	関連事項
3.4	・$f(x)=a\sin(b(x+c))+d$ という形の合成関数 ・応用		（前ページからの続き） **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と世界。音楽は数学を用いて表現できる。これが意味するのは、音楽が数学的ということか、数学が音楽的ということか、それともある共通の「真理」を両者が反映しているということか。 **応用**「物理」ＳＬ・ＨＬ 4.1（単振動の運動学）
3.5	・逆関数 $x\mapsto\arcsin x$， $x\mapsto\arccos x$， $x\mapsto\arctan x$，それらの定義域、値域、およびグラフ		
3.6	・代数的あるいはグラフを用いて有界区間で三角方程式を解く方法（三角法の公式や因数分解の使用を含む） **以下は必須ではない** －三角方程式の一般解		**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。どのようにすれば、１つの方程式に対して無限個の解が離散的に存在し得るか。
3.7	・余弦定理 ・角が一意に定まらない場合も含む正弦定理 ・三角形の面積の公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$ ・応用	・具体例として、航海術や２次元と３次元の問題、仰角と俯角などを挙げる	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。三角形の内角の和が 180°より小さくなることも、ちょうど 180°になることも、180°より大きくなることもあるとすると、三角形の内角の和という「事実」について、また数学的知識の本質について、どのようなことがいえるか。 **応用**　「物理」ＳＬ・ＨＬ 1.3（ベクトルとスカラー）、「物理」ＳＬ・ＨＬ 2.2（力と力学） **国際的な視野**　ニュートンの重力をめぐるイギリスとフランスの論争に決着をつけるため、三角測量を使っての地球表面の曲がり具合の特定。

トピック４ —— 必修項目：ベクトル　24時間

　このトピックでは、２次元ベクトルと３次元ベクトルの使い方を紹介するとともに、点、直線、および平面に関する問題を解く力を養うことをねらいとします。

	内容	詳細	関連事項
4.1	・ベクトルの概念 ・有向線分によるベクトルの表現 ・単位ベクトル、基底ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ・ベクトルの成分： $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$		**ねらい８**　ベクトルを使うと、位置特定に関するさまざまな問題を解決することができる。この手法は、遭難船員を救助する場合やレーザー誘導爆弾で建物を破壊する場合にも用いられる。 **応用**　「物理」ＳＬ・ＨＬ 1.3（ベクトルとスカラー）、「物理」ＳＬ・ＨＬ 2.2（力と力学） **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。１つの命題について、異なる数学的概念を基に何通りもの証明が与えられる場合がある。このことは、数学の知識について何を意味するか。
	・次の各概念への代数的アプローチと幾何学的アプローチ： – ２つのベクトルの和と差 – 零ベクトル $\boldsymbol{0}$、ベクトル $-\boldsymbol{v}$ – スカラー倍 $k\boldsymbol{v}$ – ベクトルの大きさ $\|\boldsymbol{v}\|$ – 位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$	・ベクトルを用いた幾何学的性質の証明	
	・$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$	・点Ａと点Ｂの間の距離は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさ	

	内容	詳細	関連事項
4.2	・２つのベクトルの内積の定義 ・内積の性質： $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ $(k\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=k(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$ $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{v}\|^2$ ・２つのベクトルのなす角 ・直交するベクトル、平行なベクトル	・$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\cos\theta$。ただし、$\theta$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ のなす角 ・3.6 と関連づける ・零ベクトルでない２つのベクトルについて、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ であることと両者が直交することは同値である ・平行な２つのベクトルに対しては $\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$ が成り立つ	**応用**　「物理」ＳＬ・ＨＬ 2.2（力と力学） **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。内積をこのように定義するのはなぜか。
4.3	・２次元および３次元における直線のベクトル方程式：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ ・運動学への簡単な応用 ・２つの直線のなす角	・直線の方程式を表す以下の形式の知識 ・媒介変数表示： $x=x_0+\lambda l,\ y=y_0+\lambda m,\ z=z_0+\lambda n$ ・デカルト表示： $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	**応用**　３次元における直線運動のモデリング。 **応用**　ＧＰＳなどのナビゲーション機器。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。直線の表示方法はデカルト表示よりもベクトル表示の方が優れているといわれることがあるが、それはなぜか。
4.4	・一致、平行、交わり、ねじれの位置という２直線の位置関係とそれぞれの間の区別 ・交点		
4.5	・２つのベクトルの外積の定義 ・外積の性質： $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$ $(k\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=k(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ ・$\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\|$ の幾何学的解釈	・$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\sin\theta\,\boldsymbol{n}$。ただし、$\theta$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ のなす角、$\boldsymbol{n}$ は単位法線ベクトルで、その向きは右ねじの法則に従う ・三角形と平行四辺形の面積	**応用**　「物理」ＳＬ・ＨＬ 6.3（磁力と磁界）

	内容	詳細	関連事項
4.6	・平面のベクトル方程式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$ ・法線ベクトルを使った $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$ という表示法 ・平面のデカルト方程式 $ax + by + cz = d$		
4.7	・直線と平面の交わり、２平面の交わり、３平面の交わり ・直線と平面のなす角、２平面のなす角	・1.9 と関連づける ・各結果の幾何学的解釈	**「知の理論」（ＴＯＫ）** 数学と「知る人」。３次元の対象は、視覚的に表現するよりも記号を用いて表現する方がわかりやすいのはなぜか。またこのことから、他の次元における数学的知識については、どのようなことがいえるか。

トピック５ ―― 必修項目：確率・統計　36時間

このトピックでは、基本的な概念を紹介することをねらいとします。それら基本的な概念は、統計データの操作と表現（5.1）、確率の法則（5.2 〜 5.4）、確率変数とその確率分布（5.5 〜 5.7）の３つに大別できます。必要な計算の多くは、グラフ電卓を用いて実行することになります。得られた結果そのものを理解すると同時にそれを解釈することに重点が置かれます。なお試験の際、統計表の使用は認められません。

	内容	詳細	関連事項
5.1	・母集団、標本、無作為標本、離散型データと連続型データの度数分布の各概念 ・グループ分けされたデータ：区間の中心値、区間幅、区間の上限値と下限値 ・平均、分散、標準偏差 **以下は必須ではない** －標本を基にして、母集団の平均および分散を推測する	・「試験問題１」および「試験問題２」では、データを母集団として扱う ・試験では以下の公式を使うべきである $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$, $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{n} - \mu^2$	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。数学と統計学は別個の科目として扱われることがあるが、それはなぜか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　知ることの本質。情報とデータには違いがあるか。 **ねらい８**　統計学を用いると、計測が困難な性質よりも計測が容易な性質を偏重することにつながらないか。 **応用**　「心理学」ＳＬ・ＨＬ（記述統計学）、「地理」ＳＬ・ＨＬ（地理的技能）、「生物」ＳＬ・ＨＬ 1.1.2（統計分析） **応用**　日常生活におけるデータ収集の方法（全数調査と標本抽出調査の比較）。 **応用**　誤解されやすいマスコミ報道の統計データ。

5.2	・試行、結果、同様に確からしい、標本空間 (U)、事象の概念 ・事象 A の確率 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$ ・事象 A の余事象 A'（A でない） ・問題を解決するために、ベン図、樹形図、数え上げの原理、結果の表を使う		**ねらい８**　賭博に見られるような「計算できる確からしさ」に基づく理論を日常生活（経済など）に適用すると弊害があるといわれるはなぜか。 **国際的な視野**　確率の数学的な理論は17世紀のフランスで発展した。
5.3	・和事象、$\mathrm{P}(A \cup B)$ に関する公式 ・互いに排反な事象		
5.4	・条件つき確率とその定義 $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ ・独立事象とその定義 $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B')$ ・３つ以下の事象に対してベイズの定理を適用する	・$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ を使って独立性を示す	**応用**　医学研究の分野で確率の手法を用いることにより、特定の病気に対する危険因子を評価する。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。確率論において定義された「独立性」は、日常経験における「独立性」と同じものであるか。
5.5	・離散型確率変数、連続型確率変数、およびそれらの確率分布の各概念 ・確率密度関数の定義と用法 ・期待値（平均）、最頻値、中央値、分散、および標準偏差 ・応用	・連続型確率変数の場合、確率密度関数が最大値となるような確率変数の値を最頻値という ・具体例として、偶然性の要素が大きなゲームを挙げる	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知る人」。データの標本はどの程度信頼することができるか。 **応用**　保険会社が見込める利益。

5.6	・二項分布とその平均および分散 ・ポアソン分布とその平均および分散 **以下は必須ではない** －平均および分散の正式な証明	・1.3で学習する二項定理と関連づける ・確率変数がこれらの分布をもつための条件	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と現実の世界。二項分布が有効なモデルとなるような場面は現実に存在するか。
5.7	・正規分布 ・正規分布の性質 ・正規確率変数の標準化	・確率変数に対する確率と確率変数の値はテクノロジーを使って求める必要がある ・標準化された値（z）は平均からの隔たりが標準偏差いくつ分に相当するかを表す ・2.3と関連づける	**応用**　「化学」ＳＬ・ＨＬ 6.2（衝突理論）、「心理学」ＨＬ（記述統計学）、「生物」ＳＬ・ＨＬ 1.1.3（統計分析） **ねらい８**　正規分布を誤って用いると、危険な推論や結論に至ることがあるのはなぜか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と知識の主張。正規分布などの数学モデルは、どの程度信頼できるか。 **国際的な視野**　ド・モアブルが正規分布を導入し、ケトレーがそれを用いて「平均人」（l'homme moyen）の概念を提唱した。

トピック６ —— 必修項目：微分・積分　48時間

このトピックは、生徒に微分・積分の基本的な概念と手法、およびそれらの応用例を紹介することをねらいとします。

	内容	詳細	関連事項
6.1	・極限、連続性、および収束のインフォーマルな理解（数学的に厳密な方法ではなく、感覚的にわかる方法で捉える） ・最も基本的な考え方に基づく導関数の定義 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ・導関数は傾きとしても変化率としても解釈される ・接線および法線の方程式を求める ・増加関数および減少関数を識別する ・第２次導関数 ・高次導関数	・$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ という結果にも言及する ・1.1 と関連づける ・この定義は多項式にのみ適用する ・1.3 の二項定理と関連づける ・$\frac{dy}{dx}$，$f'(x)$ という第１次導関数の２つの表記法 ・代数的手法とテクノロジーの両方を用いる ・$\frac{d^2y}{dx^2}$，$f''(x)$ という第２次導関数の２つの表記法 ・$\frac{d^ny}{dx^n}$，$f^{(n)}(x)$ という表記法に親しむ。1.4 の数学的帰納法に関連づける	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。微分積分学はライプニッツとニュートンによってほぼ同時期に確立されたが、この事実は数学がその発見に先立って存在するという主張を裏づけることになるか。 **国際的な視野**　古代ギリシャ人は０の概念を受け入れなかったが、そのことはアルキメデスが微積分に到達しなかったことに対してどのように意味をもつか。 **国際的な視野**　「０で割る」ことの意味を説明しようとしたインド（西暦 500 ～ 1000 年）の数学者たちのさまざまな試みについて調べる。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知る人」。ニュートンとライプニッツの論争から、人間の感情と数学的発見についてどのようなことがいえるか。 **応用**　「経済」ＨＬ 1.5（企業理論）、「化学」ＳＬ・ＨＬ 11.3.4（図式法）、「物理」ＳＬ・ＨＬ 2.1（運動学）

	内容	詳細	関連事項
6.2	・x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, および $\ln x$ の導関数 ・関数の和および定数倍の微分 ・積および商の微分法 ・合成関数に対する連鎖律 ・相対変化率 ・陰関数の微分 ・$\sec x$, $\csc x$, $\cot x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, および $\arctan x$ の導関数		**応用**　「物理」ＨＬ 2.4（等速円運動）、「物理」12.1（誘導起電力（emf）） **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。コーシーなどの数学者たちが微積分に対して確固たる理論的基礎づけを与える以前から、オイラーは解析学に重要な進展をもたらすことができた。ただし、解析学の成果の中にはコーシーの業績を待って初めて成し遂げられたものもある。このことから、証明の重要性と数学の本質についてどのようなことがいえるか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と現実の世界。一見抽象的な微積分の概念から生み出される数学モデルを通じて、月面到達といった人類の偉業を成し遂げることが可能となる。このことから、数学モデルと物理的な現実との関係についてどのようなことがいえるか。
6.3	・極大値と極小値 ・最適化問題 ・接線の傾きが０である変曲点と０でない変曲点 ・関数のグラフの挙動（f, f' および f'' の各グラフ間の関係を含む） **以下は必須ではない** －$f''(x)$ が定義されていない変曲点（$y=x^{1/3}$ における $(0, 0)$ など）	・第１次導関数の符号の変化と第２次導関数の符号を基にして極大値か極小値かを判定する ・$f''(x)>0$ の場合に対応する「下に凸」という用語、および $f''(x)<0$ の場合に対応する「上に凸」という用語の使い方 ・変曲点では $f''(x)=0$ が成り立ち、なおかつ $f''(x)$ の符号が変わる（凸方向の上下が反転する）	

	内容	詳細	関連事項
6.4	・微分の逆演算としての不定積分 ・x^n, $\sin x$, $\cos x$, および e^x の不定積分 ・6. 2 の結果を用いたその他の不定積分 ・それらの関数と一次関数との合成関数	・不定積分は曲線族として解釈される ・$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$ ・具体例として $\int (2x-1)^5\,dx$, $\int \frac{1}{3x+4}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ などを挙げる	
6.5	・積分定数を決定するための境界条件のある微分の逆演算 ・定積分 ・ある区間において曲線と x 軸または y 軸で囲まれた領域の面積、複数の曲線で囲まれた領域の面積 ・x 軸または y 軸のまわりの回転体の体積	・定積分の中には、テクノロジーを使わなければ値を求められないものもある	**応用**　工業デザイン
6.6	・変位 s、速度 v、加速度 a に関する運動学の問題 ・総移動距離	・$v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds}$ ・総移動距離 $= \int_{t_1}^{t_2} \lvert v\rvert\,dt$	**応用**　「物理」ＨＬ 2. 1（運動学） **国際的な視野**　数学の必修項目に運動学が取り入れられているのは、特定の文化的伝統を反映してのことか。また、何をもって数学と呼ぶかは誰が決めるのか。
6.7	・置換積分 ・部分積分	・試験では、標準的ではない置換が出される ・6. 2 と関連づける 例：$\int x \sin x\,dx$, $\int \ln x\,dx$ ・部分積分を繰り返す 例：$\int x^2 e^x\,dx$, $\int e^x \sin x\,dx$	

トピック７ ――選択項目：確率・統計　48時間

この選択項目では、生徒が統計学を実践的に学び、かつ統計学に関する理解度が十分なレベルに達したことを具体的な形で示す機会を提供することをねらいとします。また、考察の対象がどのケースに該当するのかを判断する力や、得られた結果を解釈する力を養うことも選択項目のねらいです。この選択項目では全体を通じてグラフ電卓を使用します。グラフ電卓については、二項分布、ポアソン分布、正規分布、および t 分布に関するさまざまな計算値をはじめ、確率関数、確率密度関数、累積分布関数、累積分布関数の逆関数、p 値、および検定統計量を導出できる機能が最低限必要となります。生徒は、問題を数学的に定式化したうえで、その計算結果をグラフ電卓から読み取り、それを記述形式で説明することが求められます。その際、電卓に特有の言葉遣いや個々の機種でのみ使われる言葉遣いは避けなければなりません。

	内容	詳細	関連事項
7.1	・離散型分布および連続型分布の累積分布関数 ・幾何分布 ・負の二項分布 ・離散型確率変数の確率母関数 ・確率母関数を使って、n 個の独立な確率変数の和の平均、分散、および分布を求める	・$G(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_x P(X = x)t^x$	**国際的な視野**　パスカル分布とも呼ばれる。 **ねらい８**　データファイルの統計的圧縮。
7.2	・単独の確率変数の１次変換 ・n 個の確率変数の１次結合の平均 ・n 個の独立な確率変数の１次結合の分散 ・独立な確率変数の積の期待値	・$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + \mathrm{b}$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ ・$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$	

	内容	詳細	関連事項
7.3	・不偏推定量と不偏推定値 ・分散に基づく不偏推定量の比較 ・μ の不偏推定量としての $\overline{X}$ ・σ^2 の不偏推定量としての S^2	・$\mathrm{E}(T)=\theta$ が成り立つとき、T を θ の不偏推定量であるという。 ・$\mathrm{Var}(T_1)<\mathrm{Var}(T_2)$ が成り立つとき、T_1 は T_2 より有効な推定量であるという ・$\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}$ ・$S^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$	**「知の理論」（TOK）**　数学と世界。母数の値が未知の場合、不偏推定量の方が偏りのある推定量よりも常に良い推定量だといえるだろうか。
7.4	・独立な正規確率変数の一次結合は正規分布に従う。特に、以下の命題が成り立つ $X\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\Rightarrow \overline{X}\sim \mathrm{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ ・中心極限定理		**ねらい８・「知の理論」（TOK）**　数学と世界。「もし中心極限定理がなかったら、ヒューマンサイエンス（人間科学）の統計データに価値あるものは存在しないだろう」 **「知の理論」（TOK）**　数学の本質。中心極限定理は、数学的に証明することができるが（形式主義）、それが現実に正しいことは定理を応用することによって確かめられる（経験主義）。
7.5	・正規母集団についての平均の信頼区間	・標本の大きさに関係なく、σ が既知の場合は正規分布を使い、σ が未知の場合は t-分布を使用する。１標本検定の例としてマッチドペアのケースを扱う	**「知の理論」（TOK）**　数学と世界。ブランドAとブランドBの評価について両者の平均の信頼区間が大きく重なっている場合、「ブランドAの方がブランドBよりも平均的な評価は高い」という主張にはほとんど意味がない。 **応用**　「地理」

	内容	詳細	関連事項
7.6	・帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 ・有意水準 ・棄却域、棄却限界値、p 値、片側検定と両側検定 ・第Ｉ種の過誤と第Ⅱ種の過誤（それらの確率の計算も含む） ・正規母集団の平均の仮説検定	・標本の大きさに関係なく、σ が既知の場合は正規分布を使い、σ が未知の場合は t-分布を使用する。１標本検定の例として、マッチドペアのケースを扱う	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と世界。実際問題として、「結果は有意である」と述べることと、「結果は正しい」と述べることは同じか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と世界。母集団について検定できる母数が特定のものに限られるとしたら、ヒューマンサイエンス（人間科学）の「知識に関する主張」に対する評価は変わるだろうか。 **応用**　第Ｉ種の過誤および第Ⅱ種の過誤を避けることがより重視されるのは、それぞれどのような場合か。

	内容	詳細	関連事項
7.7	・２変数分布の概説	・あるクラスの生徒たちに対して実施した純粋数学のテストの点数と統計学のテストの点数、ある学校の教師の給与と年齢など、身近な実例について気軽に議論する。２変数の関連性を測る尺度の必要性や、一方の変数値から他方の変数値を予測できる可能性にも言及する	**応用**　地理的技能 **ねらい８**　喫煙と肺がんとの相関関係は数学によって「発見」されたが、なぜ相関関係があるのかを説明するのは科学の役目だった。
	・共分散と（母集団の）積率相関係数 ρ	$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$ $= \mathrm{E}(XY) - \mu_x \mu_y$ ただし　$\mu_x = \mathrm{E}(X),\ \mu_y = \mathrm{E}(Y)$ $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$	**応用**　計算ツールを使って、データ群にさまざまな曲線をあてはめてみる。
	・X と Y が独立であれば $\rho = 0$、X と Y が直線関係にあれば $\rho = \pm 1$ であることの証明	・X と Y の関連性を測る尺度としての ρ の使用。その値が 0 に近い場合は関連性が低く、+1 または –1 に近い場合は関連性が高い	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と世界。１つのデータ群に対し近似的にあてはまる曲線がいくつも存在する場合には、何を手がかりにすれば「正しい」モデルとなる式を知ることができるだろうか。
	・X および Y の n 組の観測データに関する（標本）積率相関係数 R の定義。ρ の評価に対する応用	$R = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}$ $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\left(\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2\right)}}$	**ねらい８**　物理学者のフランク・オッペンハイマーはこう書き記している。「予測のよりどころとなるのは、観測されたパターンがそれ以降も繰り返されるという仮定以外にはない」。ここには、外挿のもつ危険性がある。株価、病気のまん延、気候変動など、過去に外挿の誤りがあった例は数多く存在する。

	内容	詳細	関連事項
	・R の実測値 r のインフォーマルな解釈。散布図 ・以下のトピックは、２変数の正規性が前提となる ・t- 統計量を用いて帰無仮説 $\rho = 0$ の検定を行う ・X の Y に対する回帰式（$\mathrm{E}(X \mid Y = y)$）および Y の X に対する回帰式（$\mathrm{E}(Y \mid X = x)$）は一次式であるという知識 ・これらの回帰直線の最小二乗推定値（証明は必須ではない） ・これらの回帰直線を使って、一方の変数値から他方の変数値を予測する	・r の値が 0 に近ければ X と Y の関連性は低く、±1 に近ければ関連性は高い ・以下の作業では、可能な限り、グラフ電卓を使用することが求められる ・$R\sqrt{\dfrac{n-2}{1-R^2}}$ は、自由度 $(n-2)$ のスチューデントの t-分布に従う ・$x-\bar{x} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}\right)(y-\bar{y}) = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - n\bar{y}^2}\right)(y-\bar{y})$ ・$y-\bar{y} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)(x-\bar{x}) = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}\right)(x-\bar{x})$	（前ページより続き）

トピック８ ── 選択項目：集合・関係・群　48時間

この選択科目では、いくつかの重要な数学的概念を生徒に習得させるとともに、抽象代数を通して証明の原理を紹介することをねらいとします。

	内容	詳細	関連事項
8.1	・有限集合と無限集合、部分集合 ・集合の演算：和、共通部分、補集合、差集合、対称差 ・ド・モルガンの法則：分配法則、結合法則、および交換法則（和および共通部分に関する）	・ベン図を使ってこれらの法則を図示する ・生徒は、$A \subseteq B$ および $B \subseteq A$ を示すことによりその２つの集合の同一性を証明することが求められる場合がある	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　カントールによる超限数の理論、ラッセルのパラドックス、ゲーデルの不完全性定理。 **応用**　論理学、ブール代数、コンピューター回路。
8.2	・順序対：２つの集合の直積 ・関係：同値関係、同値類	・集合は、その上の同値関係に基づいて類別される	**応用・国際的な視野**　スコットランドの氏族。
8.3	・関数：単射、全射、全単射 ・関数の合成と逆関数	・「値域」という用語 ・関数の合成は交換可能な演算ではないこと、および f が集合 A から集合 B への全単射ならば f^{-1} が存在して集合 B から集合 A への全単射となること	
8.4	・二項演算 ・演算表（ケーリー表）	・空でない集合 S 上の二項演算 $*$ とは、任意の２つの元 $a,\ b \in S$ に対して、元 c を一意的に対応させる規則のことである。すなわち、この定義によれば、集合上の二項演算は必ずしも閉じてはいない	

	内容	詳細	関連事項
8.5	・二項演算：結合法則、分配法則、および交換法則	・ℝおよびℂ上の算術演算 ・分配則の具体例を示すため次のような事実を説明してもよい：「ℝ上では、乗法は加法に対して分配的であるが、加法は乗法に対して分配的ではない」	**「知の理論」（ＴＯＫ）** 一般性のあるモデルと身近な具体例のどちらがより基本的か。
8.6	・単位元 e ・元 a の逆元 a^{-1} ・a が逆元をもてば a による左簡約律および右簡約律が成り立つことの証明 ・単位元および逆元の一意性の証明	・単位元 e は右単位元（$a * e = a$）であり、かつ左単位元（$e * a = a$）である ・$a * a^{-1} = e$ かつ $a^{-1} * a = e$ が成り立つ	
8.7	・群 $\{G, *\}$ の定義 ・群の演算表はラテン方格だが、その逆は正しくない ・アーベル群	・演算 $*$ が与えられた集合 G について： － G は $*$ に関して閉じている － $*$ は結合則を満たす － G は単位元を含む － G の各元は G の中に逆元をもつ ・すべての元 a, $b \in G$ に対して $a * b = b * a$ が成り立つ	**応用** 多項式の根を求める公式の存在。 **応用** ５次以上の多項式に対してはそのような公式が存在しないことを証明したガロア理論。

	内容	詳細	関連事項
8.8	・群の例： －$\mathbb{R}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Z}$，および $\mathbb{C}$ は加法に関して群をなす －n を法とする整数の剰余類は加法に関して群をなす －p を法とする０でない整数の剰余類は乗法に関して群をなす（ただし p は素数） ・正三角形や正方形などの平面図形の対称性 ・関数の合成に関して可逆な関数	・合成　$T_2 \circ T_1$ は T_1, T_2 の順に作用させることを表す	**応用**　ルービックキューブ、時間の尺度、結晶構造、分子の対称性、ストラットとケーブルの構造体、物理ＨＬ 2.2（特殊相対性）、八道説、超対称性。
8.9	・群の位数 ・群の元の位数 ・巡回群 ・生成元 ・巡回群はすべてアーベル群であることの証明		**応用**　音楽における五度圏、素数。
8.10	・置換全体は置換の合成に関して群をなす ・置換の巡回表記 ・任意の置換は互いに素な巡回置換の積として表せるという結果 ・巡回置換の積の位数	・試験問題では、$1 \to 3$，$2 \to 1$，$3 \to 2$ という置換を表すのに $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ という形式や $(1\ 3\ 2)$ という表記も用いられる	**応用**　暗号法、鳴鐘法。

	内容	詳細	関連事項
8.11	・部分群、真部分群 ・部分群の判定法の使い方と証明 ・群における部分群による左剰余類および右剰余類の定義と例 ・ラグランジュの定理 ・有限群の位数は任意の元の位数で割り切れるという結果の使い方と証明（ラグランジュの定理の系）	・真部分群は、群そのものではなく、単位元のみからなる部分群でもない ・$\{G,*\}$ を群、H を G の空でない部分集合とする。このとき、任意の $a,\ b \in H$ に対して $a*b^{-1} \in H$ が成り立てば、$\{\mathrm{H},*\}$ は $\{G,*\}$ の部分群である ・$\{G,*\}$ を有限群、H を G の空でない部分集合とする。このとき、H が $*$ に関して閉じていれば、$\{H,*\}$ は $\{G,*\}$ の部分群である	**応用**　素因数分解、対称性の破れ。

	内容	詳細	関連事項
8.12	・群準同型写像の定義	・有限群だけでなく無限群についても言及する ・$\{G, *\}$ と $\{H, \circ\}$ を群とする。すべての a，$b \in G$ に対し $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ が成り立つとき、写像 $f: G \to H$ を準同型写像という	
	・準同型写像の核の定義 ・準同型写像の核および像が部分群であることの証明	・$f: G \to H$ が群準同型写像であるとき、$f(a) = e_H$ を満たす $a \in G$ 全体の集合を $\mathrm{Ker}(f)$ で表す	
	・単位元および逆元に対して準同型写像がもつ性質の証明	・単位元：e_G，e_H をそれぞれ $(G, *)$，$(H, \circ)$ の単位元とすると $f(e_G) = e_H$ が成り立つ ・逆元：すべての $a \in G$ に対し $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ が成り立つ	
	・群の同型写像	・有限群だけでなく無限群についても言及する ・準同型写像 $f: G \to H$ が全単射であるとき、f を同型写像という	
	・元の位数は同型写像によって保たれる		

トピック９ —— 選択項目：微分・積分　48時間

この選択項目では、極限に関する諸定理や級数の収束、および微積分の結果を用いた微分方程式の解法を紹介することをねらいとします。

	内容	詳細	関連事項
9.1	・実数の無限数列、およびその収束と発散	・和、差、積、商の極限の直観的な扱い方、はさみうちの原理 ・発散は、収束しないことを意味する	**「知の理論」（ＴＯＫ）** ゼノンのパラドックス、無限数列と極限の概念が物理的世界の理解に対して与えた影響。
9.2	・無限級数の収束 ・収束の判定法：比較判定法、ダランベールの収束判定法、積分判定法 ・$p-$級数 $\sum \frac{1}{n^p}$ ・絶対収束する級数 ・条件収束する級数 ・交項級数 ・べき級数：収束半径と収束範囲。ダランベールの収束判定法による収束半径の特定	・級数の和は、その級数の部分和からなる数列の極限である ・級数は、$\lim_{x\to\infty} x_n = 0$ であっても収束するとは限らないが、$\lim_{x\to\infty} x_n \neq 0$ であれば必ず発散するという点に生徒は注意する必要がある ・$\sum \frac{1}{n^p}$ は、$p > 1$ で収束し、それ以外のときは発散する。$p = 1$ の場合は調和級数になる ・収束の条件 ・打ち切り誤差の絶対値が、その級数の次の項の絶対値よりも小さくなる	**「知の理論」（ＴＯＫ）** $1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}$ というオイラーの発想。これは誤りなのか、それとも別の見方なのか。

	内容	詳細	関連事項
9.3	・１点における関数の連続性と微分可能性 ・連続関数と微分可能な関数	・連続性の判定法： $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$ ・微分可能性の判定法： f は a で連続であり、かつ $\lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ および $\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在して両者は等しい ・関数はある点で連続であっても微分可能とは限らないことに生徒は注意する必要がある（$f(x)=\lvert x\rvert$ や区分的な関数など）	
9.4	・和の極限としての積分。上リーマン和と下リーマン和 ・微積分学の基本定理 ・$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ という形の広義積分	・$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y\right] = f(x)$	**国際的な視野**　アルキメデスは積分法にどの程度接近していたか。 **国際的な視野**　微積分学の発展に対するアラビア、中国、インドの数学者の貢献。 **ねらい８**　数学の進歩に功績があるのは、ライプニッツかニュートンか、それとも彼らが手本とした有能な数学者たちか。 **「知の理論」（TOK）**　$f(x)=\frac{1}{x}, 1\le x\le\infty$ を考えると、無限領域の面積が有限になっている。われわれはこの事実を直観的に納得できるか。また、このことから数学の知識についてどのようなことがいえるか。

	内容	詳細	関連事項
9.5	・１階微分方程式 ・勾配場を用いた幾何学的解釈（アイソクラインの特定を含む） ・オイラー法を用いた $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ の数値解法 ・変数分離形 ・$y=vx$ を代入して、同次微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ を解く ・積分因子を用いた $y'+P(x)y=Q(x)$ の解法	・$y_{n+1}=y_n+hf(x_n, y_n)$, $x_{n+1}=x_n+h$（h は定数）	**応用**　現実の世界に現れる微分方程式（ニュートンの冷却の法則、人口増加、放射性炭素年代測定など）。
9.6	・ロルの定理 ・平均値の定理 ・テイラー多項式、ラグランジュの剰余項 ・e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$, $(p\in\mathbb{Q})$ のマクローリン級数 ・代入、積、積分、微分により他の級数を得る ・微分方程式から得られるテイラー級数	・関数の近似への応用、中間点における $(n+1)$ 次導関数の値を用いた剰余項の公式 ・生徒は収束区間に注意する必要がある	**国際的な視野・「知の理論」（ＴＯＫ）**　ブルバキが数学の理解と指導に与えた影響。 **国際的な視野**　ケーララ学派の業績と比較する。

	内容	詳細	関連事項
9.7	・$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ および $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ という形の極限値を求める ・ロピタルの定理またはテイラー級数を使用する	・不定形 $\frac{0}{0}$ および $\frac{\infty}{\infty}$ ・ロピタルの定理を繰り返し適用する	

トピック10――選択項目：離散数学　48時間

この選択項目では、生徒が論理的推論、アルゴリズム的思考、およびその応用について学習する機会を提供することをねらいとします。

	内容	詳細	関連事項
10.1	・強い帰納的推論 ・鳩の巣原理	・例えば、算術の基本定理の証明や、n 個の頂点からなる木は n-1 本の辺をもつことの証明	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。証明と予想（ゴールドバッハ予想など）の違い。数学の命題は、証明されない限り、真とはなり得ないか。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　背理法
10.2	・$a \mid b \Rightarrow b = na$ なる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する ・定理：$a \mid b$ かつ $a \mid c \Rightarrow a \mid (bx \pm cy)$,（$x,\ y \in \mathbb{Z}$） ・除法定理とユークリッドの互除法 ・整数 a と b の最大公約数 gcd (a, b) および最小公倍数 lcm (a, b) ・素数、互いに素な数と算術の基本定理	・除法定理 $a = bq + r$（$0 \leq r < b$） ・ユークリッドの互除法により、２つの整数の最大公約数を求めることができる	**国際的な視野**　ユークリッドの互除法は、紀元前300年頃にアレクサンドリアで書かれた『ユークリッド原論』に記されている。 **ねらい８**　暗号法における素数の利用。強力な素因数分解アルゴリズムの発見がインターネットや銀行のセキュリティに与え得る影響。

10.3	・一次ディオファントス方程式 $ax + by = c$	・一般解および制約条件のもとでの解（すべての解が正であることなど）が求められる	**国際的な視野**　3 世紀にアレクサンドリアで書かれたディオファントスの『算術』に記されている。『算術』を研究していたフランスの数学者ピエール・ド・フェルマー（1601 ～ 1665）はその余白に、高次ディオファントス方程式に関するある命題について簡単な証明を発見したという書き込みを残した。この命題がフェルマーの最終定理である。
10.4	・合同算術 ・一次合同式の解法 ・連立一次合同式の解法（中国の剰余定理）		**国際的な視野**　3 世紀の中国の数学者、孫子によって議論された。
10.5	・さまざまな数を底とする整数の表現	・試験では、16を超える数を底とする問題は出題されない	**国際的な視野**　バビロニア人は60進法を、マヤ人は20進法を発達させた。
10.6	・フェルマーの小定理	・$a^p = a \pmod{p}$（p は素数）	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学の本質。数百年の間、単なる興味の対象として追い求められてきたものが、やがて「役に立つ」ようになることもある。

10.7	・グラフ、頂点、辺、面。隣接している頂点、隣接している辺 ・頂点の次数、次数列 ・握手補題	・２つの頂点は、ある辺によって結ばれているとき、隣接しているという。また２つの辺は、共通の頂点に接続しているとき、隣接しているという	**ねらい８**　地下鉄の路線図など記号を使った位置関係図、化学の構造式、電気回路。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。四色問題の証明。コンピューターの結果に基づいて定理が証明された場合、その定理が正しいことを知っていると主張するためにはどうすればよいか。
	・単純グラフ、連結グラフ、完全グラフ、２部グラフ、平面的グラフ、木、重みつきグラフ（表形式での表現を含む） ・部分グラフ、補グラフ	・特に断りがないかぎり単純でないグラフも考慮すべきことを強調する必要がある。隣接表という用語を用いてもよい	**ねらい８**　回路基板の製作における平面的グラフの重要性。
	・オイラーの公式：$v-e+f=2$，平面的グラフに関する定理（$e \leq 3v-6$，$e \leq 2v-4$ など。これらの定理から k_5 および $k_{3,3}$ が平面的でないという結果が導かれる）	・グラフが単純かつ平面的で $v \geq 3$ ならば、$e \leq 3v-6$ が成り立つ ・グラフが単純かつ平面的で長さ３の基本閉路を含まず $v \geq 3$ ならば、$e \leq 2v-4$ が成り立つ	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。オイラー標数 $v-e+f$ の高次元への応用。視覚化できない図形の特性を理解するために使用する。
10.8	・歩道、小道、道、回路、閉路 ・オイラー小道とオイラー回路 ・ハミルトン道とハミルトン閉路	・連結グラフは、各頂点の次数が偶数のとき、かつそのときに限ってオイラー回路を含む ・簡単なケースのみを扱う	**国際的な視野**　「ケーニヒスベルクの橋」問題。
10.9	・グラフに関するアルゴリズム：クルスカル法、ダイクストラ法		

10.10	・中国人郵便配達問題 **以下は必須ではない** ・次数が奇数の頂点を５つ以上含むグラフ ・巡回セールスマン問題 ・上界を判定するための最近傍法 ・下界を判定するための頂点除去法	・重みつきグラフにおいて、各辺を少なくとも１回通る最短路を求める ・重みつき完全グラフにおいて、重みの和が最小のハミルトン閉路を求める	**国際的な視野**　中国の数学者、管梅谷が 1962 年に提出した問題。 **「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と「知識に関する主張」。コンピューターを使って、30個の頂点からなる重みつき完全グラフの中のハミルトン閉路をすべて検証するためには、どの程度の時間が必要だろうか。
10.11	・漸化式。初期条件、数列の再帰的定義 ・１階および２階の定数係数線型同次漸化式の解法 ・１階線型漸化式 $u_n = au_{n-1} + b$ ・漸化式によるモデリング	・特性方程式が重解や複素数解をもつ場合も含む ・複利計算の問題、債務返済の問題、数え上げ問題などを解く	**「知の理論」（ＴＯＫ）**　数学と世界。フィボナッチ数列などの数列と、芸術や生物学とのつながり。

用語集：離散数学

はじめに

グラフ理論には統一的に用いられていない専門用語が多く、教科書ごとに使われる用語が異なる可能性もあります。教師および生徒はこの点を認識しておくことが必要です。一例を挙げると、頂点／節／接合点／点、辺／線／弧、頂点の次数／位数、多重辺／並列辺、ループ／自己ループなどの用語です。

ＩＢの試験問題では、シラバスで用いた用語がそのまま使用されます。明確を期すため、用語の定義を以下にまとめておきます。

用語

２部グラフ	頂点全体を２つの集合に分割することができ、なおかつ各集合内のどの２頂点も隣接していないようにできるグラフ
回路	始点と終点が一致し、かつ同じ辺が重複して現れない歩道
グラフGの補グラフ	頂点集合がGと同じで、かつGでは辺で結ばれていない頂点どうしのみをすべて辺で結んだグラフ
完全２部グラフ	２部グラフであって、かつ一方の集合に属する任意の頂点と他方の集合に属する任意の頂点が辺で結ばれているもの
完全グラフ	どの頂点対も１つの辺で結ばれている単純グラフ
連結グラフ	どの頂点対も道で結ばれているグラフ
閉路	始点と終点が一致し、かつ同じ頂点が重複して現れない歩道
頂点の次数	その頂点に接続している辺の数。ループは、端点ごとに１つずつ計２つの辺と数える
非連結グラフ	道で結ばれていない頂点対が少なくとも１つ存在するグラフ
オイラー回路	グラフ内のすべての辺を含む回路
オイラー小道	グラフ内のすべての辺を含む小道

グラフ	頂点の集合と辺の集合の組
２つの単純グラフ G と H の間のグラフ同型	G の頂点集合と H の頂点集合の間の１対１対応であって、かつ G の頂点対が隣接しているときかつそのときに限って、それに対応する H の頂点対が隣接しているもの
ハミルトン閉路	グラフ内のすべての頂点を含む閉路
ハミルトン道	グラフ内のすべての頂点を含む道
ループ	ある頂点とそれ自身とを結ぶ辺
最小全域木	重みつきグラフの全域木のうち、重みの和が最小のもの
多重辺	同じ頂点対を結ぶ辺が２つ以上存在すること
道	同じ点が重複して現れない歩道
平面的グラフ	どの２つ辺も互いに交わることなく平面上に描くことができるグラフ
単純グラフ	ループも多重辺も含まないグラフ
グラフの全域木	グラフ内のすべての頂点を含む部分グラフであって、かつ木であるもの
部分グラフ	グラフ内に含まれるグラフ
小道	同じ辺が重複して現れない歩道
木	閉路を含まない連結グラフ
歩道	隣接する辺の列
重みつきグラフ	それぞれの辺に数値または重みが割りあてられたグラフ
重みつき木	それぞれの辺に数値または重みが割りあてられた木

ディプロマプログラムにおける評価

概要

評価は、指導および学習と一体化した要素です。ＤＰでは、カリキュラム目標の達成を支援し、生徒に適切な学習を促すことを評価の最も重要なねらいとして位置づけています。ＤＰでは、学校外で実施されるＩＢによる外部評価（external assessment)、および内部評価（internal assessment）の両方が実施されます。外部評価のための提出課題はＩＢ試験官が採点します。一方、内部評価のための評価課題は教師が採点し、ＩＢによるモデレーション（評価の適正化）を受けます。

ＩＢが規定する評価には次の２種類があります。

- 「形成的評価」（formative assessment）は、「指導」と「学習」の両方に指針を与えます。生徒の理解と能力の発達につながるよう、学びの種類や、生徒の長所と短所といった特徴について、生徒と教師に正確で役立つフィードバックを提供します。また、形成的評価からは、科目のねらいと目標に向けての進歩をモニタリングするための情報が得られるので、指導の質の向上にもつながります。
- 「総括的評価」（summative assessment）は、生徒のこれまでの学習を踏まえて、生徒の到達度を測ることを目的としています。

ＤＰでは、主に履修期間の終了時または終了間近の生徒の到達度を測る総括的評価に重点が置かれています。ただし、評価方法の多くは、指導および学習期間中に形成的に用いることもできます。教師はそうした評価を実施するよう推奨されています。総合的な評価計画は、指導、学習およびカリキュラム編成と一体を成すものです。より詳しくは、ＩＢ資料『プログラムの基準と実践要綱』を参照してください。

ＩＢが採用する評価アプローチは、評価規準に準拠した「絶対評価」です。集団規準に準拠した「相対評価」ではありません。この評価アプローチは、生徒の成果を特定の到達の度合いを示す基準に照らし合わせ、そのパフォーマンスを判断するものであり、他の生徒の成果と比較するものではありません。ＤＰにおける評価について、より詳しくはＩＢ資料（英語版）「*Diploma Program assessment: Principles and practice*（ディプロマプログラムにおける評価：原則と実践)」を参照してください。

ＯＣＣでは、ＤＰの科目のコースデザイン、指導、および評価の分野で教師を支援するための多様なリソースを入手できます。また、リソースをＩＢストア（http://store.ibo.org）で購入することもできます。試験問題の見本やマークスキーム（採点基準)、教師用参考資料、科目レポート、評価規準の説明など、その他の資料もＯＣＣで取り扱っています。過去の試験問題やマークスキームはＩＢストアで購入できます。

評価方法

ＩＢは複数の方法を用いて、生徒の成果を評価します。

評価規準

評価規準（assessment criterion）は、オープンエンド型の課題に対して適用されます。各規準は生徒が身につけることが期待されている特定の能力に重点を置いています。評価目標は「何ができるべきか」を明確にし、評価規準は「どの程度よくできるべきか」を到達の度合いを示す基準に照らし合わせて測ります。評価規準を採用することで、個々のさまざまな解答の違いを識別することが可能となり、多様な解答を奨励することにつながります。

各規準には、どのような基準を満たすと特定のレベルに到達していると判断されるのかが詳細に説明されています。その説明は到達レベル別に段階的に並べられ、レベルごとに１つまたは複数の点数が設けられています。また、採点ではベストフィット（適合）モデルを用いて、各規準を個別に適用します。何点がその規準の満点となるかは規準の重要度に応じて異なる場合があります。各規準での得点を合計したものを、その課題に対する総合点とします。

マークバンド（採点基準表）

マークバンド（採点基準表）は、求められる学習成果の基準を一覧にまとめた表です。教師はマークバンドに照らし合わせて、生徒の到達度を判断します。規準ごとに、到達レベルに沿って段階的に到達の度合いを示す基準が並べられています。生徒の学習成果の違いを識別するために、各レベルの点数には幅をもたせてあります。個々の学習成果物について、どの点数をつけるかを確定するには、ベストフィット（適合）アプローチを用います。

マークスキーム（採点基準）

この用語は特定の試験問題のために用意された分析的マークスキーム（採点基準）のことを指します。分析的マークスキームは、生徒の最終的な解答や、その他特定の種類の答案を要求する試験問題のために作成されます。これらは、各設問に対する総合点を生徒の解答の異なる部分についてどのように配分するかについて試験官に詳細な指示を与えるものです。このマークスキームには、試験問題の解答で求められる内容や、評価規準をどのように適用するかについての手引きとなる採点のための注意事項などが含まれます。

評価の概要

2014年 第１回試験

評価要素	配点比率
外部評価（５時間） **試験問題１（２時間）** 電卓の使用は不可（120点） **セクションA** 必修項目に関するシラバスの内容に基づいた短答式の必答問題 **セクションB** 必修項目に関するシラバスの内容に基づいた論述式の必答問題 **試験問題２（２時間）** グラフ電卓が必要（120点） **セクションA** 必修項目に関するシラバスの内容に基づいた短答式の必答問題 **セクションB** 必修項目に関するシラバスの内容に基づいた論述式の必答問題 **試験問題３（１時間）** グラフ電卓が必要（60点） 主に選択項目に関するシラバスの内容に基づいた論述式の必答問題	**80%** **30%** **30%** **20%**
内部評価 内部評価は、学校内の教師が行い、科目修了時にＩＢによる外部モデレーション（評価の適正化）を行います。 **「数学探究」** 「数学ＨＬ」における内部評価は、生徒が個別に取り組む「数学探究」を対象に行われます。「数学探究」では、数学の１つの分野について研究を行い、その成果を課題レポートにまとめます。（20点）	**20%**

外部評価

概要

いずれの筆記試験においても生徒の評価はマークスキーム（採点基準）に基づいて行われます。マークスキーム（採点基準）は、試験ごとに定められています。

外部評価の詳細

試験問題１、２、３

筆記試験は、問題作成も採点もＩＢによって行われます。筆記試験全体の得点は、科目に対する最終評価の 80%分として算定されます。これらの筆記試験は、生徒がどの程度の知識と技能を身につけたかを示すためのものです。

電卓

「試験問題１」

生徒の電卓使用は認められません。出題されるのは主に、グラフ電卓を使用しなくても解析的方法を用いれば解答を導くことができる問題です。この筆記試験の目的は、ケアレスミスの可能性がある複雑な計算を行わせることにはありませんが、設問によっては、有る程度の算術計算が含まれる場合もあります。

「試験問題２」および「試験問題３」

生徒は試験中、グラフ電卓をいつでも使える状態になければなりませんが、すべての問題にグラフ電卓が必要というわけではありません。使用が許可される電卓の種類については、その規定がＩＢ資料『ＤＰ手順ハンドブック』に記載されています。

『数学公式集 ―― 数学ＨＬ・発展数学ＨＬ』

試験の際は、書き込みのされていない公式集のコピーが各生徒の手元に１部ずつ用意されていなければなりません。学校には、この公式集をＩＢＩＳまたはＯＣＣからダウンロードし、生徒全員分を用意する責任があります。

採点の対象

採点の対象となるのは、方法、正確性、答え、解釈、推論です。

「試験問題１」および「試験問題２」では、答えが正しい場合でも答えに至る過程が記されていなければ減点されることがあります。答えにはその裏づけとなる過程や説明を（図式、グラフ、計算などの形で）必ず示されていなければなりません。逆に答えが正しくない場合でも、それを導くための正しい方法が示されていれば、部分点が与えられることがあります。そのため、いずれの生徒に対しても、答えに至る過程を明示するように指導することが必要です。

試験問題 1

試験時間：２時間

配点比率：30%

- 「試験問題１」には、短答式の問題からなるセクションＡと論述式の問題からなるセクションＢがあります。
- この試験では、生徒が電卓を使用することは認められません。

出題範囲

- この試験には、必修項目の**すべて**のトピックに関する知識が必要です。ただし、毎回の試験セッションにおいて、すべてのトピックが出題されるわけではありません。

配点

- この試験は**120**点満点で、最終評価の**30%**分として算定されます。
- 出題される問題の難易度や分量はさまざまです。そのため、必ずしも各問題の配点が同じというわけではありません。配点は、設問の冒頭に記載されています。

セクションA

- このセクションでは、シラバスの必修項目の内容に基づいた短答式の必答問題が出題されます。配点は60点です。
- このセクションの目的は、シラバスの内容全般にわたる生徒の知識と理解度を評価することです。ただし、各トピックがすべて同じ比重で出題されるというわけではありません。

問題の形式

- 各問題を解くにあたっては、若干の手順を踏む必要があります。
- 問題は、単語、記号、図式、もしくは表の形式、またはそれらを組み合わせた形式で出題される場合があります。

セクションB

- このセクションでは、シラバスの必修項目の内容に基づいた論述式の必答問題が数問出題されます。配点は60点です。

- １つの問題に対し、２つ以上のトピックに関する知識が必要となる場合もあります。
- このセクションの目的は、必修項目に関する生徒の知識と理解度をより詳しく評価することです。このセクションの出題対象となるシラバスのトピックは、セクションＡよりも狭い範囲に絞られる場合があります。

問題の形式

- 一貫性のある推論に基づいた論述解答が要求されます。
- それぞれの問題は、ある１つのテーマに沿って構成されています。
- 問題は、単語、記号、図式、もしくは表の形式、またはそれらを組み合わせた形式で出題される場合があります。
- 通常、各問題には難易度の傾斜が設けられています。問題の導入部での解答作業は比較的容易で、後半になるにつれて解答作業は難しくなります。重視されるのは問題解決の能力です。

試験問題２

試験時間：２時間

配点比率：30%

- 「試験問題２」には、短答式の問題からなるセクションＡと論述式の問題からなるセクションＢがあります。
- この試験ではグラフ電卓が必要ですが、必ずしもすべての問題にグラフ電卓を使用する必要はありません。

出題範囲

- この試験には、必修項目の**すべて**のトピックに関する知識が必要です。ただし、毎回の試験セッションですべてのトピックが出題されるわけではありません。

配点

- この試験は**120**点満点で、最終評価の**30%**分として算定されます。
- 出題される問題の難易度や分量はさまざまです。そのため、必ずしも各問題の配点が同じというわけではありません。配点は、設問の冒頭に記載されています。

セクションＡ

- このセクションでは、必修項目に関するシラバスの内容に基づいた短答式の必答問題が出題されます。配点は60点です。
- このセクションの目的は、シラバスの内容全般にわたる生徒の知識と理解度を評価することです。ただし、各トピックがすべて同じ比重で出題されるというわけではありません。

問題の形式

- 各問題を解くにあたっては、若干の手順を踏む必要があります。
- 問題は、単語、記号、図式、もしくは表の形式、またはそれらを組み合わせた形式で出題される場合があります。

セクションB

- このセクションでは、シラバスの必修項目の内容に基づいた論述式の必答問題が数問出題されます。配点は60点です。
- １つの問題に対し、２つ以上のトピックに関する知識が必要となる場合もあります。
- このセクションの目的は、必修項目に関する生徒の知識と理解度をより詳しく評価することです。このセクションの出題対象となるシラバスのトピックは、セクションＡよりも狭い範囲に絞られる場合があります。

問題の形式

- 一貫性のある推論に基づいた論述解答が要求されます。
- それぞれの問題は、ある１つのテーマに沿って構成されています。
- 問題は、単語、記号、図式、もしくは表の形式、またはそれらを組み合わせた形式で出題される場合があります。
- 通常、各問題には難易度の傾斜が設けられています。問題の導入部での解答作業は比較的容易で、後半になるにつれて解答作業は難しくなります。重視されるのは問題解決の能力です。

試験問題３

試験時間： 1 時間

配点比率：20%

- この試験は、選択した選択項目に基づいた論述式の必答問題が数問出題されます。
- 各問題の導入部では可能な限り、選択項目のトピックとつながりのある必修項目の内容が扱われますが、それが難しい場合（選択項目が離散数学の場合など）は、問題の導入部が必修項目の問題と同程度の難易度になるよう配慮されます。

出題範囲

- 生徒は**すべて**の問題に答えなければなりません。
- この試験では、必修項目で取り上げた内容に関する知識に加え、学習した選択項目の内容全般に関する知識が必要です。

配点

この試験は**60**点満点で、最終評価の**20%**分として算定されます。

- 問題によって分量や難易度が異なることがあります。そのような場合、各問題の配点も同じとは限りません。配点は、設問の冒頭に記載されています。

問題の形式

- 一貫性のある推論に基づいた論述解答が要求されます。
- それぞれの問題は、ある１つのテーマに沿って構成されていることもあれば、互いに無関係ないくつかの小問に分かれていることもあります。後者の場合、それぞれの小問にはそのことが明記されます。
- 問題は、単語、記号、図式、もしくは表の形式、またはそれらを組み合わせた形式で出題される場合があります。
- 通常、各問題には難易度の傾斜が設けられています。問題の導入部での解答作業は比較的容易で、後半になるにつれて解答作業は難しくなります。重視されるのは問題解決の能力です。

内部評価

内部評価の目的

内部評価は授業と一体を成す要素であり、ＳＬとＨＬのいずれのレベルの生徒も必ず取り組まなければなりません。内部評価課題では、筆記試験でのように時間の制限やその他の制約に左右されることなく、それぞれの興味を追い求めつつ、知識と技能の活用を示すことができます。内部評価はできる限り通常の授業に織り込まれるべきであり、学習項目を教え終わった後に別途実施されるべきではありません。

「数学ＨＬ」では、生徒が個別に取り組む「数学探究」（mathematical exploration）が内部評価の対象となります。「数学探究」では、数学の１つの分野について研究を行い、その成果を課題レポートにまとめます。５つの評価規準に照らし合わせて採点されます。

指導と「生徒本人が取り組んだものであること」の認証

内部評価のために提出される学習成果物は生徒自身が取り組んだものでなければなりません。しかし、学習成果物が「生徒本人が取り組んだものである」ことは、生徒自身がタイトルやトピックを決め、教師からの支援を一切受けずに、独自に内部評価課題に取り組まなければならないということではありません。教師は、生徒が内部評価課題を計画する段階と取り組む段階で重要な役割を果たします。生徒に以下の点について確実に理解させるのは、教師の責任です。

- 内部評価の対象となる課題についての要件
- ＩＢの「学問的誠実性」に関する方針（ＯＣＣで関連文書を入手可能）
- 評価規準 —— 評価課題を通じて、生徒は与えられた評価規準に効果的に取り組むべきであること

教師と生徒は「数学探究」について話し合わなければなりません。生徒がアドバイスや情報を得るために率先して教師と話し合うよう促してください。また、生徒が指導を求めたことで減点してはなりません。ただし、課題を完成させるにあたって教師から相当量の助けを要した場合には、ＩＢ資料『ＤＰ手順ハンドブック』に収載されている該当する書類にその旨を記入するようにしてください。

教師には、学問的誠実性に関連する概念、特に知的財産と生徒本人が課題に取り組むことについての基本的な意味および重要性をすべての生徒に確実に理解させる責任があります。教師は必ず、すべての評価課題が要件に沿って取り組まれていることを確認しなければ

ばなりません。また、内部評価課題が完全に生徒自身によるものでなければならないことを生徒に対して明確に説明しなければなりません。

学習プロセスの一環として、生徒は「数学探究」の**第１稿**を作成した後、教師からアドバイスを受けることができます。ただし、ここで与えられるアドバイスは、どうすれば生徒の取り組みの質を高めることができるかについてであり、教師が第１稿に細かいコメントを大量に書き込んだり、編集を加えたりすることは認められません。なお、この第１稿の次に教師に提出される課題が最終稿となります。

モデレーション（評価の適正化）、または評価のためにＩＢに提出されるすべての学習成果物は、本当に生徒本人が取り組んだものであることを教師が認証しなければなりません。また、規則違反の事実またはその疑いがあってはなりません。各生徒は学習成果物が自分自身のものであること、またそれが最終版であることを正式に認め、内部評価課題のカバーシートに署名をします。なお、署名済みのカバーシートと内部評価課題の最終版を正式に教師（もしくはコーディネーター）に提出した後は、これを撤回することはできません。

生徒本人が取り組んだものであるかどうかは、生徒と課題の内容について議論することと、次のいずれか（または２項目以上）を精査することを通じて確認します。

- 生徒の最初の案
- 記述課題の１回目の草稿
- 引用・参考文献
- 生徒自身が書いたものであることが確認されている他の課題との文体の比較

教師と生徒によって署名されたカバーシートは、ＩＢ試験官によるモデレーション（評価の適正化）のために提出されるサンプルの課題だけではなく、すべての生徒の課題に添付されなければなりません。教師と生徒がカバーシートに署名をした場合でも、その成果物が生徒本人が取り組んだものでない可能性がある趣旨のコメントがある場合には、生徒はその課題の評価を受ける資格を失います。したがって、その課題に対しては、成績も与えられません。詳細については、ＩＢ資料『学問的誠実性』と同（英語版）『*General regulations:Diploma Programme*（総則：ＤＰ編）』を参照してください。

同一の課題を、内部評価と「課題論文」（ＥＥ）の両方の要件を満たすものとして重複して提出することはできません。

グループ作業

「数学研究」では、グループ作業は認められません。それぞれが、個人の作業です。

書くことや研究を含む数学研究に関連するすべての作業は、生徒自身が取り組んだものであるべきだということを生徒に理解させるようにしてください。そのために、教師は、生徒が自分自身の学習に対して責任感をもつよう働きかけ、学びを主体的に自分自身のものとして受け入れて、自分自身の研究と作業に誇りをもつよう生徒を促すようにしてください。

時間配分

内部評価は「数学ＨＬ」におけるきわめて重要な要素です。最終評価の20％を占めます。この配点比率を踏まえて、課題に取り組むのに必要な知識、技能、理解の指導にあてる時間、および課題を進めるために必要な時間を配分する必要があります。

作業には、約10時間を割りあてることが推奨されています。この中には、以下の時間を含めるようにしてください。

- 教師が生徒に「数学探究」の要件について説明する時間
- 授業中に生徒が「数学探究」に取り組む時間
- 教師と各生徒が話し合う時間
- 課題に目を通し、進行状況を確認する時間、および生徒本人が取り組んだ課題であるかどうかをチェックする時間

内部評価への評価規準の適用

内部評価には、多くの評価規準が設けられています。各評価規準には、学習成果物が特定のレベルに到達している場合にその成果物に見られる特徴を記述した「レベルの説明」と、それに対応する点数が明示されています。「レベルの説明」では、基本的に学習の成果として捉えられる肯定的な側面を判断基準として取り上げています。ただし、下位の到達レベルでは、達成できなかった点を判断基準としている場合もあります。

教師がＳＬおよびＨＬの内部評価課題を採点する際は、評価規準の「レベルの説明」に照らし合わせて判断しなければなりません。

- 教師は、各評価規準について、生徒の学習成果物のレベルを最も的確に示している説明を探します。
- 生徒の学習成果物を評価する際、教師は、到達度「０」から始めて、評価規準で学習成果物のレベルよりも高いレベルを示していると思われる説明に行きあたるまで、各レベルの説明を読まなければなりません。生徒の到達度は、最後のレベルよりも１つ手前のものとなります。そのレベルを生徒の到達度として記録します。
- 整数のみを用います。分数や小数を用いた点は認められません。
- 教師は合格・不合格の線引きをするような考え方をせずに、各評価規準において、学習成果物を最も適切に表すレベルを判別することに専念しなければなりません。
- 「レベルの説明」にある最上位レベルは、欠点のない完璧な学習成果を意味するのではありません。基準は、生徒が最上位レベルに達することができるように設定されています。その学習成果物が最上位レベルの説明内容にあてはまるのであれば、教師は最高点をつけることを躊躇してはなりません（最低点についても同様です）。
- １つの規準において到達レベルの高かった生徒が、他の規準においても到達レベルが高いとは限りません。同様に、１つの規準において到達レベルの低かった生

徒が、他の規準においても到達レベルが低いとは限りません。教師は、生徒の全体的な評価からある特定の点数をその生徒の得点として想定するべきではありません。

・評価規準を生徒に示すことが推奨されています。

内部評価の詳細

数学探究

配当時間：10 時間
配点比率：20%

はじめに

「数学ＨＬ」では、「数学探究」（mathematical exploration）が内部評価の対象となります。「数学探究」は、生徒が自ら選択したトピックに基づいて課題レポートを作成するもので、数学の特定の分野に的を絞って取り組むことが求められます。ここで重視されるのは、数学的なコミュニケーション（式、図式、グラフなどを含む）のほか、付記された注釈、適切な数学的記述、よく練られたアイデアなどです。生徒は、話し合いや面談などを通じて教師から意見や評価を聞きながら、自らの興味の対象を発展させることが必要です。これによって生徒は、試験のときのような時間的制約を受けることなく興味のある分野について理解を深めることができるとともに、達成感を得ることができるでしょう。

課題レポートは最終的に、６～12ページ程度の長さにまとめる必要があります。ワープロで作成しても手書きで作成しても構いません。生徒は作業の各段階の内容について、それを明確に理解していることがわかるような形で説明できなければなりません。課題レポートは、授業の中で発表する必要はありませんが、同じ授業を受けている他の生徒が容易に理解できるような形でまとめることが必要です。課題レポートには詳細な参考文献目録を付し、原典はＩＢが定める学問的誠実性の方針に則って参照する必要があります。また直接引用した情報は、その出典を明らかにしなければなりません。

「数学探究」の目的

「数学ＨＬ」のねらいに即して生徒が学習に取り組んだ成果は、最終試験や「数学探究」により正式に評価されます。「数学探究」の目的は、「数学ＨＬ」の目標に関して評価を行うだけでなく、生徒が数学の概念やプロセスに対する理解を深め、数学に対する理解の幅を広げるための機会を提供することにあります。この点については、「ねらい」でも触れられています〔**特に、ねらい６～９（応用、テクノロジー、道徳的、社会的、および倫理的な影響、国際的側面）**〕。また「数学探究」を通じて、生徒が数学的活動から何か有益なものを学び取ると同時に、数学的活動に刺激ややりがいを見いだすことも目的の１つで

す。生徒は「数学探究」に取り組むことで、「ＩＢの学習者像」に掲げられた人物像に近づくことができるでしょう。

「数学探究」の具体的な目的は次のとおりです。

・ 数学に対する生徒個人の洞察を深めるとともに、数学に関して自ら問いを立てる能力を養う。
・ 長い時間をかけて数学的成果をまとめあげる機会を生徒に提供する。
・ 数学的なプロセスを独力で応用したときの達成感を生徒に経験させる。
・ 数学のもつ美しさや力、有用性を自ら体験するための機会を生徒に提供する。
・ 必要であれば、テクノロジーが数学のツールとして強力であることを認識したうえで、それを利用し、その力を十分理解するよう生徒に促す。
・ 生徒の根気と粘り強さを養うとともに、自らが取り組んだ作業の重要性をあらためて考えさせる。
・ 数学についてどのような進歩があったのかを生徒が自信をもって述べる機会を提供する。

「数学探究」の進め方

必要な技能を習得する機会が生徒に与えられるよう、「数学探究」の作業は授業に組み入れなければなりません。そのため授業の時間を、取り組む分野についての全般的な話し合いや、生徒に対する評価規準の詳細な説明にもあてることができます。数学探究のより詳しい進め方については、教師用参考資料に記載されています。

要件と推奨事項

生徒が選択できる数学的活動は、数学的モデリング、数学に関する調査、数学の応用など多種多様です。教師用参考資料では、教師および生徒がトピックを選択する際の手掛かりとなるようなキーワードを一覧にまとめて紹介しています。ただし、生徒はその内容とは関係のないトピックを選択しても構いません。

「数学探究」の課題レポートは通常、図式やグラフを含めて12ページ以内にまとめる必要があります。ただし、参考文献目録は除きます。重視されるのは記述の量ではなく、その質です。

教師は、生徒に対してより生産的な探究の道筋を示したり、適切な情報源について示唆を与えたり、課題レポートの作成段階で探究の内容や明確さについて助言を与えたりするなど、「数学探究」のすべての段階で適切な指導を行うことが求められます。

生徒の作成する課題レポートに何らかの誤りがある場合、その旨を指摘するのは教師の役割ですが、その誤りを教師自身が具体的に修正することは避けるべきです。また、生徒は「数学探究」全般にわたって教師に助言を求めることが望ましいということを強調しておく必要があります。

生徒は全員、「数学探究」を進めるうえでの要件と評価規準を十分に把握していなければなりません。まず生徒は各自の「数学探究」について履修開始後のできるだけ早い段階

で計画を立て始める必要があります。また、各作業について期限を厳格に定めることも重要です。具体的には、「数学探究」で扱うトピックと概要説明の提出期限、課題レポートの草稿の提出期限、および最終提出期限を定めるようにします。

「数学探究」を進めていく際、生徒は授業の中で学習した数学の内容を活用するよう心掛けることが求められます。活用する内容は、シラバスに記載されているような、授業のレベルに見合ったものであることが必要です。「数学ＨＬ」のシラバスにはない内容をテーマとした課題レポートを作成することは期待されていません。ただし、そのような課題レポートであっても減点の対象にはなりません。

内部評価の規準

「数学探究」は、「数学ＨＬ」の学習目標に関する評価規準を基づいて学校の科目担当教師によって評価され、その後ＩＢによるモデレーション（評価の適正化）を受けます。

個々の「数学探究」は、以下に示す５つの評価規準に照らして評価されます。各評価規準に応じた得点の合計が、「数学探究」の最終評価となります。最終評価は20点満点です。

「数学探究」の課題レポートを提出しなかった生徒は、「数学ＨＬ」を修了することができません。

評価規準Ａ	コミュニケーション
評価規準Ｂ	数学的表現
評価規準Ｃ	主体的な取り組み
評価規準Ｄ	振り返り
評価規準Ｅ	数学の活用

評価規準Ａ：コミュニケーション

この評価規準は、「数学探究」の課題レポートの構成と論理的一貫性を評価するためのものです。構成の整った課題レポートとは、「導入部」があり、「理由づけ」（トピックの選択理由の説明を含む）がなされ、「探究の目的」が述べられ、「結論」があるものを指します。また論理的一貫性のある課題レポートとは、展開が理路整然として容易に理解できるものを指します。

グラフや表、図式は、付録として添付するのではなく、課題レポート内の適切な箇所に配置する必要があります。

到達度	レベルの説明
0	下記のいずれの水準にも達していない。
1	それなりの論理的一貫性がある。

到達度	レベルの説明
2	それなりの論理的一貫性があり、構成もある程度整っている。
3	論理的一貫性があって構成も整っている。
4	論理的一貫性があって構成も整っており、簡潔で完成度が高い。

評価規準Ｂ：数学的表現

この評価規準は、生徒が以下の技能をどの程度身につけているかを評価するためのものです。

- 適切な数学的言語（表記、記号、専門用語）を用いることができる。
- 重要な用語を必要に応じて定義することができる。
- 公式、図式、表、グラフ、モデルなど、さまざまな形式の数学的表現を必要に応じて用いることができる。

生徒は、数学的なアイデアや推論、結論を述べる場合には、数学的言語を用いることが求められます。

生徒は、グラフ電卓、スクリーンショットソフト、グラフ作成ソフト、表計算ソフト、データベースソフト、描画ソフト、ワープロソフトなど、目的に合ったＩＣＴツールを適切に使用することにより、数学的コミュニケーションの質を高めることが推奨されます。

到達度	レベルの説明
0	下記のいずれの水準にも達していない。
1	適切な数学的表現がある程度用いられている。
2	用いられている数学的表現はおおむね適切である。
3	用いられている数学的表現はすべての箇所で適切である。

評価規準Ｃ：主体的な取り組み

この評価規準は、生徒がどの程度の主体性をもって「数学探究」に取り組み、それをどの程度自分自身のものにしたのかを評価するためのものです。主体的な取り組みは、さまざまな側面や技能を通して評価することができます。具体的には、独自の考察あるいは独創的な考え方ができているか、自分自身の興味に向き合っているか、数学的概念を独自の方法で提示できているかなどです。

到達度	レベルの説明
0	下記のいずれの水準にも達していない。
1	限定的または表面的な主体的な取り組みが認められる。

到達度	レベルの説明
2	ある程度の主体的な取り組みが認められる。
3	十分に主体的な取り組みが認められる。
4	顕著な主体的な取り組みが豊富に認められる。

評価規準D：振り返り

この評価規準は、生徒が「数学探究」の見直し、分析、および検証をどのように行っているかを評価するためのものです。振り返りの内容は、「数学探究」の結論の中に見て取ることもできますが、「数学探究」全体に見出すこともできます。

到達度	レベルの説明
0	下記のいずれの水準にも達していない。
1	限定的または表面的な振り返りが認められる。
2	有意義な振り返りが認められる。
3	きわめて重要な振り返りがはっきり認められる。

評価規準E：数学の活用

この評価規準は、生徒が「数学探究」の中で数学をどの程度用いているか、またそれをどの程度使いこなしているかを評価するためのものです。

生徒は、授業のレベルに見合った課題レポートを作成することが求められます。「数学探究」では、シラバスに記載されたトピックか、それと同等以上のトピックを対象にする必要があります。ただし、「事前に学習すべきトピック」に記載されている内容をすべて踏まえている必要はありません。活用されている数学が授業のレベルに見合っていない場合、この評価規準に基づいて与えられる点数は最高で２点です。

数学的な内容については、その中にごく小さな誤りがあったとしても、それが数学の論理展開を損なったり不合理な結果を導く原因になったりしていなければ、誤りはないと見なしても構いません。

高度な数学的素養としては、難しい数学的概念を理解しそれを用いること、１つの問題を多角的に捉えること、根本にある構造を見抜き数学の別々の分野を結びつけることなどが挙げられます。

厳密性には、数学的な議論や計算を行う際に論理および言語が明確であることも含まれます。

数学に対する緻密さとは、誤りがなく、常に適切なレベルの正確性が維持されていることを指します。

到達度	レベルの説明
0	下記のいずれの水準にも達していない。
1	適切な数学が一部に用いられているが、理解度はごく限られていると認められる。
2	適切な数学が一部に用いられており、探究した数学の内容には正しい部分もある。知識、理解度ともにある程度には達していると認められる。
3	授業のレベルに見合った適切な数学が用いられており、探究した数学の内容に誤りはない。知識、理解度ともに十分だと認められる。
4	授業のレベルに見合った適切な数学が用いられている。探究した数学の内容には誤りがなく、求められている高度な数学的素養が反映されている。知識、理解度ともに十分だと認められる。
5	授業のレベルに見合った適切な数学が用いられている。探究した数学の内容には誤りがないうえ、求められている高度な数学的素養が反映されており、厳密性も十分に備わっている。知識、理解度ともに申し分ないと認められる。
6	授業のレベルに見合った適切な数学が用いられている。探究した数学の内容には緻密さがあるうえ、求められている高度な数学的素養が反映されており、厳密性も十分に備わっている。知識、理解度ともに申し分ないと認められる。

指示用語の解説

「数学」のための指示用語

生徒は、試験問題で用いられる次の重要な用語や表現に習熟する必要があります。それぞれの意味は以下に示すとおりです。試験問題には、これらの用語が用いられますが、それ以外の用語を用いて、生徒に考えを述べるよう求める場合もあります。

計算しなさい Calculate	作業の過程を適切に示しながら、答えとなる数値を求めなさい。
コメントしなさい Comment	与えられた記述または計算結果に基づき、見解を述べなさい。
比較しなさい Compare	２つ（またはそれ以上）の事柄または状況の類似点について、常に双方（またはすべて）について言及しながら、説明しなさい。
比較・対比しなさい Compare and contrast	２つ（またはそれ以上）の事柄または状況の類似点および相違点について、常に双方（またはすべて）について言及しながら、説明しなさい。
作成しなさい Construct	図表形式または論理形式で情報を示しなさい。
対比しなさい Contrast	２つ（またはそれ以上）の事柄または状況の相違点について、常に双方（またはすべて）について言及しながら、説明しなさい。
推論しなさい Deduce	与えられた情報から結論を導き出しなさい。
論証しなさい Demonstrate	具体例や実際の応用例を挙げながら、推論または根拠に基づいて明らかにしなさい。
詳しく述べなさい Describe	詳細に述べなさい。
決定しなさい Determine	考えられる唯一の答えを求めなさい。

微分しなさい Differentiate	関数の導関数を求めなさい。
区別しなさい Distinguish	２つまたはそれ以上の概念または事柄の相違点を明確にしなさい。
描きなさい、作図しなさい Draw	鉛筆を用いて、名称がつけられた正確な図またはグラフとして表しなさい。直線には直定規を用いること。図表は一定の縮尺で描きなさい。グラフは（該当する場合）正確に点を書き入れ、直線または滑らかな曲線でつなぎなさい。
概算しなさい、見積もりなさい Estimate	およその値を求めなさい。
説明しなさい Explain	理由や要因などを詳しく述べなさい。
求めなさい Find	作業の過程を適切に示しながら答えを得なさい。
前問の結果を用いて Hence	前問の結果を利用して、要求されている結果を得なさい。
必要ならば前問の結果を用いて Hence or otherwise	前問の結果を利用してもよいが、それ以外の方法を用いてもよい。
特定しなさい Identify	数ある可能性の中から答えを確定しなさい。
積分しなさい Integrate	関数の積分を求めなさい。
解釈しなさい Interpret	与えられた情報から傾向をつかんで結論を引き出すため、知識と理解を用いなさい。
調べなさい Investigate	事実を立証し新たな結論に到達するため、観測、調査、または詳細かつ体系的な検証を行うこと。
正当化しなさい Justify	答えや結論を裏づける妥当な理由や根拠を述べなさい。
名称をつけなさい Label	図表に名称をつけなさい。
列挙しなさい List	説明をつけ加えずに、簡潔な答えを並べなさい。

プロットしなさい Plot	図表上に点の位置を書き入れなさい。
予測しなさい Predict	予想されている結果を示しなさい。
証明しなさい Prove	形式的な推論の積み重ねによって、要求されている結果を得なさい。
示しなさい Show	計算過程や結果の導出過程を示しなさい。
～であることを示しなさい Show that	証明の手順を踏まず（場合によっては与えられた情報を用いて）要求された結果を出しなさい。「～であることを示しなさい」という問題は通常、電卓は必要ありません。
略図を描きなさい、大まかな図やグラフを描きなさい Sketch	（必要に応じて名称をつけ）図表またはグラフで表しなさい。略図は、求められる形または関係の概観を示し、特徴を表したものでなければなりません。
解きなさい Solve	代数、計算、グラフのいずれか、またはいずれかの組み合わせを用いて答えを求めなさい。
述べなさい State	説明または計算することなしに、特定の名称、数値、またはその他の簡潔な答えを示しなさい。
提案しなさい Suggest	解決策、仮説、またはその他の考えられる答えを示しなさい。
確かめなさい Verify	結果の正当性を示す根拠を提示しなさい。
書き出しなさい Write down	主に情報を抜き出すことによって答えを得なさい。計算はほとんど必要なく、過程を記す必要もありません。

表記法一覧

現在使用されている表記法にはさまざまなものがありますが、ＩＢでは国際標準化機構（ＩＳＯ）の勧告に基づいた表記法を採用することとしており、「数学ＨＬ」の試験問題ではその表記法が何の説明もなく使用されます。この手引きに記載されていない表記が試験問題に使用される場合は、その問題の中で表記を定義することになっています。

生徒は、試験問題に用いられるＩＢの表記法を必ずしも使用する必要はありませんが、理解していることは求められます。そのため教師は、可能な限り早い段階にこの表記法を生徒に紹介することが推奨されます。試験の際、生徒がこの表記法について質問したり調べたりすることは**認められません**。

生徒は常に、電卓で使用されている表記法ではなく、数学の表記法を正しく用いることが求められます。

$\mathbb{N}$	すべての正整数および０からなる集合 $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$	整数全体のなす集合 $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$
$\mathbb{Z}^+$	正整数全体のなす集合 $\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Q}$	有理数全体のなす集合
$\mathbb{Q}^+$	正の有理数全体のなす集合 $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$
$\mathbb{R}$	実数全体のなす集合
$\mathbb{R}^+$	正の実数全体のなす集合 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
$\mathbb{C}$	複素数全体のなす集合 $\{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
i	$\sqrt{-1}$
z	複素数
z^*	z の共役複素数
$\lvert z \rvert$	z の絶対値
$\arg z$	z の偏角
$\mathrm{Re}\, z$	z の実部
$\mathrm{Im}\, z$	z の虚部
$\mathrm{cis}\,\theta$	$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$
$\{x_1, x_2, ...\}$	元 $x_1, x_2, ...$ からなる集合
$n(A)$	有限集合 A の元の個数

$\{x \mid \quad\}$	縦棒（|）の右側に記された条件を満たす x 全体の集合
$\in$	（左辺は右辺の）元である
$\notin$	（左辺は右辺の）元ではない
$\varnothing$	空集合
U	全体集合
$\cup$	集合の和
$\cap$	共通部分
$\subset$	（左辺は右辺の）真部分集合である
$\subseteq$	（左辺は右辺の）部分集合である
A'	集合 A の補集合
$A \times B$	集合 A と B 直積（すなわち $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$）
$a \mid b$	a は b を割り切る
$a^{1/n}$, $\sqrt[n]{a}$	a の $\frac{1}{n}$ 乗、a の n 乗根（$a \geq 0$ ならば $\sqrt[n]{a} \geq 0$）
$\lvert x \rvert$	x の絶対値、すなわち $\begin{cases} x \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \text{ のとき } x \\ x < 0,\ x \in \mathbb{R} \text{ のとき } -x \end{cases}$
$\equiv$	恒等的に等しい
$\approx$	近似的に等しい
$>$	より大きい
$\geq$	以上
$<$	より小さい
$\leq$	以下
$\not>$	より大きくない
$\not<$	より小さくない
$\Rightarrow$	左辺が成り立つならば右辺が成り立つ
$\Leftarrow$	右辺が成り立つならば左辺が成り立つ
$\Leftrightarrow$	左辺が成り立つならば右辺が成り立ち、右辺が成り立つならば左辺が成り立つ
$[a, b]$	閉区間 $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	開区間 $a < x < b$
u_n	数列または級数の第 n 項
d	等差数列の公差
r	等比数列の公比
S_n	数列の最初の n 項の和 $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

S_∞	数列の無限和 $u_1 + u_2 + \ldots$
$\sum_{i=1}^{n} u_i$	$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
$\prod_{i=1}^{n} u_i$	$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$
$\binom{n}{r}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
$f : A \to B$	fは集合Aの各元を集合Bの元へ写す関数
$f : x \mapsto y$	fはxをyに対応させる関数
$f(x)$	関数fによるxの像
f^{-1}	関数fの逆関数
$f \circ g$	fと gの合成関数
$\lim_{x \to a} f(x)$	xを aに近づけたときの$f(x)$ の極限
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	xに関するyの導関数
$f'(x)$	xに関する $f(x)$ の導関数
$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$	xに関するyの第２次導関数
$f''(x)$	xに関する$f(x)$ の第２次導関数
$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$	xに関するyの第 n 次導関数
$f^{(n)}(x)$	xに関する$f(x)$ の第 n 次導関数
$\int y\,\mathrm{d}x$	xに関するyの不定積分
$\int_a^b y\,\mathrm{d}x$	$x = a$ から $x = b$ の範囲のxに関するyの定積分
e^x	xの指数関数
$\log_a x$	aを底とするxの対数関数
$\ln x$	xの自然対数 $\log_\mathrm{e} x$
sin, cos, tan	三角関数
arcsin, arccos, arctan	三角関数の逆関数

csc, sec, cot	三角関数の逆数関数
$\mathrm{A}(x, y)$	座標が (x, y) である平面上の点 A
$[\mathrm{AB}]$	点 A および B を端点とする線分
AB	$[\mathrm{AB}]$ の長さ
(AB)	点A, Bを通る直線
$\hat{A}$	Aでの角度
$\mathrm{C\hat{A}B}$	$[\mathrm{CA}]$ と $[\mathrm{AB}]$ のなす角
$\Delta\mathrm{ABC}$	A, B, Cを頂点とする三角形
$\boldsymbol{v}$	ベクトル $\boldsymbol{v}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	大きさと方向をAからBへの有向線分で表したベクトル
$\boldsymbol{a}$	位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	座標軸方向の単位ベクトル
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	$\boldsymbol{a}$の大きさ
$\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさ
$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$の内積
$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$の外積
$\mathbf{I}$	単位行列
$\mathrm{P}(A)$	事象 A の確率
$\mathrm{P}(A')$	「A でない」という事象の確率
$\mathrm{P}(A \mid B)$	事象 B が起こったときに事象 A が起こる確率
$x_1, x_2, \ldots$	実測値
$f_1, f_2, \ldots$	実測値 $x_1, x_2, \ldots$ が得られる頻度
P_x	離散型確率変数 X の確率関数 $\mathrm{P}(X = x)$
$f(x)$	連続型確率変数 X の確率密度関数
$F(x)$	連続型確率変数 X の累積分布関数
$\mathrm{E}(X)$	確率変数 X の期待値
$\mathrm{Var}(X)$	確率変数 X の分散
μ	母平均

σ^2	母分散，$\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2}{n}$, ただし $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$
σ	母標準偏差
$\overline{x}$	標本平均
s_n^2	標本分散，$s_n^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}$, ただし$n= \sum_{i=1}^{k} f_i$
s_n	標本の標準偏差
s_{n-1}^2	母分散の不偏推定値，$s_{n-1}^2 = \dfrac{n}{n-1} s_n^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$, ただし$n = \sum_{i=1}^{k} f_i$
$\mathrm{B}(n,\ p)$	nおよびpをパラメーターとする二項分布
$\mathrm{Po}(m)$	mを平均とするポアソン分布
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	μを平均、σ^2 を分散とする正規分布
$X \sim \mathrm{B}(n, p)$	確率変数Xはnおよびpをパラメーターとする二項分布に従う
$X \sim \mathrm{Po}(m)$	確率変数Xはmを平均とするポアソン分布に従う
$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	確率変数Xはμを平均、σ^2を分散とする正規分布に従う
Φ	分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う標準化正規確率変数の累積分布関数
ν	自由度数
$A \setminus B$	集合Aと集合Bとの差（すなわち $A \setminus B = A \cap B' = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$）
$A \Delta B$	集合Aと集合Bとの対称差（すなわち $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$）
κ_n	n個の頂点をもつ完全グラフ
$\kappa_{n,m}$	n個の頂点からなる頂点集合とm個の頂点からなる頂点集合に分割される完全２部グラフ
$\mathbb{Z}_p$	pを法とする整数の同値類集合 $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$
$\gcd(a,b)$	整数a ,bの最大公約数
$\mathrm{lcm}(a,b)$	整数a ,bの最小公倍数
$\boldsymbol{A}_G$	グラフGの隣接行列
$\boldsymbol{C}_G$	グラフGの重みつき隣接行列