Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel medio
Prueba 1

Martes 10 de mayo de 2016 (tarde)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NM** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

2216 – 7309

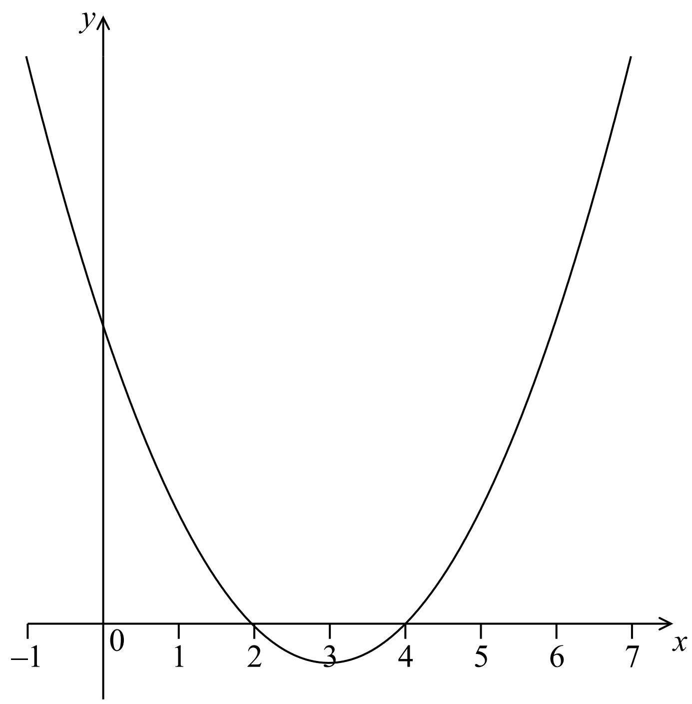
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de la función cuadrática f.



El vértice se encuentra en $(3, -1)$ y los puntos de corte con el eje x están en 2 y en 4.

La función f se puede escribir en la forma $f(x) = (x-h)^2 + k$.

(a) Escriba el valor de h y el de k. [2]

La función se puede escribir también en la forma $f(x) = (x-a)(x-b)$.

(b) Escriba el valor de a y el de b. [2]

(c) Halle el punto de corte con el eje y. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 5]

En un conjunto de datos hay 10 elementos. La suma de estos elementos es igual a 60.

(a) Halle la media. [2]

La varianza de este conjunto de datos es igual a 3. Cada uno de los valores del conjunto lo multiplicamos por 4.

(b) (i) Escriba cuál es ahora el valor de la media.

(ii) Halle cuál es ahora el valor de la varianza. [3]

3. [Puntuación máxima: 6]

Sean $x = \ln 3$ e $y = \ln 5$. Dé las siguientes expresiones en función de x e y.

(a) $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$. [2]

(b) $\ln 45$. [4]

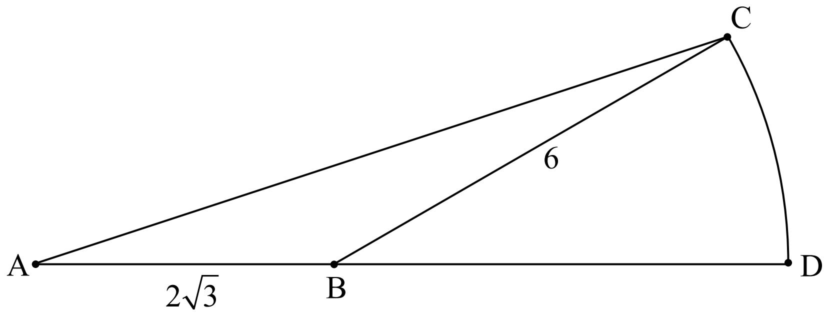
4. [Puntuación máxima: 6]

Tres términos consecutivos de una progresión geométrica son $x - 3$, 6 y $x + 2$.
Halle los posibles valores de x.

5. [Puntuación máxima: 8]

La siguiente figura muestra un triángulo ABC y un sector circular BDC de un círculo de centro B y radio 6 cm. Los puntos A, B y D pertenecen a la misma recta.

la figura no está dibujada a escala



$AB = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, área del triángulo $ABC = 3\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, $A\hat{B}C$ es obtuso.

(a) Halle $A\hat{B}C$. [5]

(b) Halle el área exacta del sector circular BDC. [3]

6. [Puntuación máxima: 7]

Sean $f(x) = 6x\sqrt{1-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$, y $g(x) = \cos(x)$, para $0 \le x \le \pi$.
Sea $h(x) = (f \circ g)(x)$.

(a) Dé $h(x)$ en la forma $a \operatorname{sen}(bx)$, donde a, $b \in \mathbb{Z}$. [5]

(b) A partir de lo anterior, halle el recorrido de h. [2]

7. [Puntuación máxima: 7]

Sean $\boldsymbol{u} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$, donde m, $n \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $\boldsymbol{v}$ es un vector unitario perpendicular a $\boldsymbol{u}$, halle los posibles valores de m y de n.

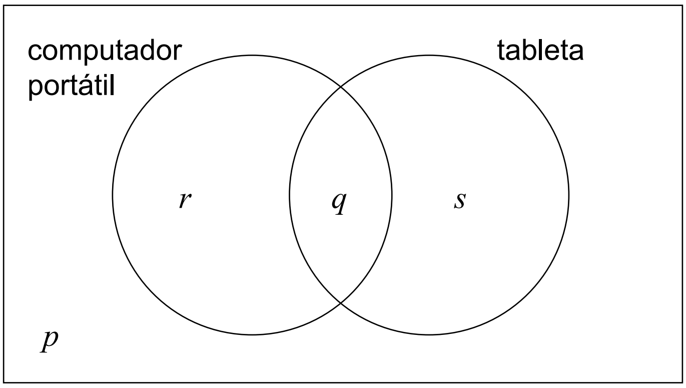
No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

8. [Puntuación máxima: 13]

En una clase de 21 alumnos, hay 12 que tienen un computador portátil, 10 que tienen una tableta y 3 que no tienen ninguno de los dos dispositivos. El siguiente diagrama de Venn muestra los sucesos "tener un computador portátil" y "tener una tableta".
Los valores p, q, r y s representan cada uno un número de alumnos.



(a) (i) Escriba el valor de p.

(ii) Halle el valor de q.

(iii) Escriba el valor de r y el de s. [5]

(b) Se escoge al azar a un alumno de esa clase.

(i) Escriba la probabilidad de que ese alumno tenga un computador portátil.

(ii) Halle la probabilidad de que ese alumno tenga o un computador portátil o una tableta, pero no los dos dispositivos. [4]

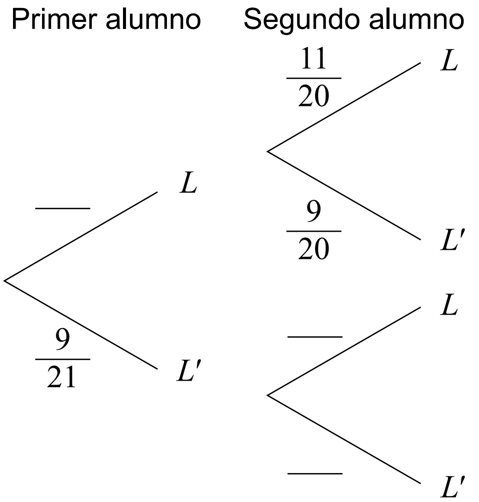
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 8: continuación)

(c) Se escogen al azar a dos alumnos de esa clase. Sea L el suceso “el alumno tiene un computador portátil”.

(i) **Copie** y complete el siguiente diagrama de árbol. (**No** escriba nada en esta página.)

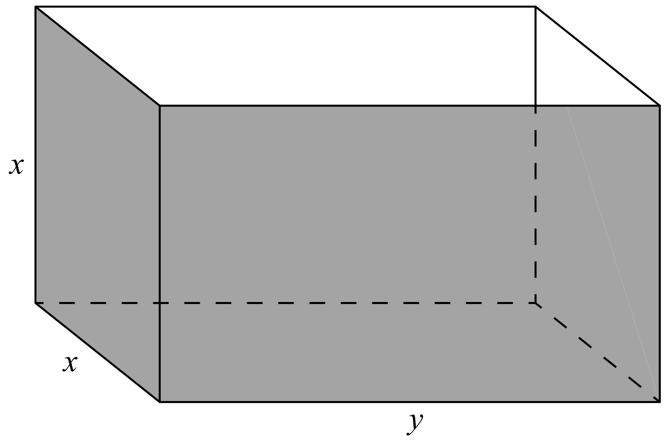


(ii) Escriba la probabilidad de que el segundo alumno tenga un computador portátil, sabiendo que el primero tiene un computador portátil. [4]

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 16]

Fred fabrica un contenedor de metal abierto con forma de ortoedro, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



El contenedor tiene x m de altura, x m de ancho y una longitud de y m. El volumen es igual a $36\,\text{m}^3$.

Sea $A(x)$ el área de la superficie externa del contenedor.

(a) Muestre que $A(x) = \dfrac{108}{x} + 2x^2$. [4]

(b) Halle $A'(x)$. [2]

(c) Sabiendo que el área de la superficie externa tiene un valor mínimo, halle la altura del contenedor. [5]

(d) Fred pinta la parte externa del contenedor. Una lata de pintura da para cubrir una superficie de $10\,\text{m}^2$ y cuesta \$20. Halle el costo total de las latas que se necesitan para pintar el contenedor. [5]

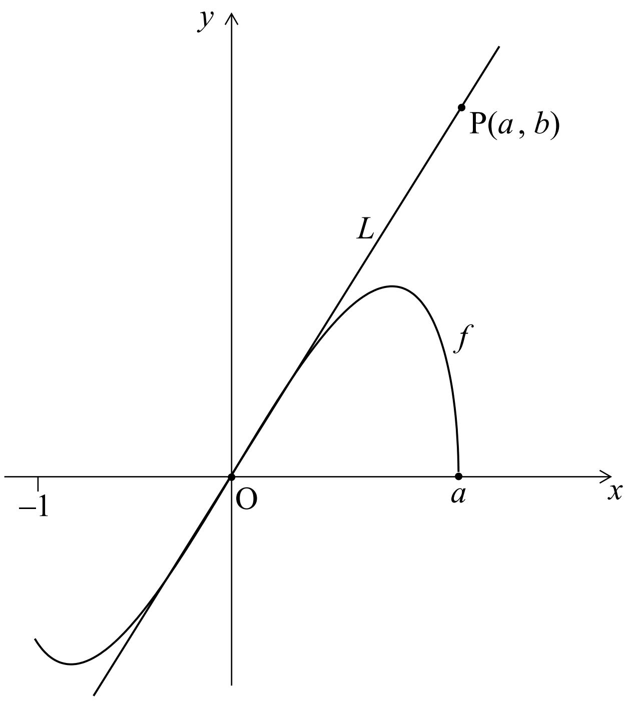
No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 16]

La siguiente figura muestra el gráfico de $f(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$, para $-1 \le x \le a$, donde $a > 1$.



La recta L es la tangente al gráfico de f en el origen, O. El punto $\mathrm{P}(a, b)$ pertenece a L.

(a) (i) Sabiendo que $f'(x) = \dfrac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, para $-1 \le x < a$, halle la ecuación de L.

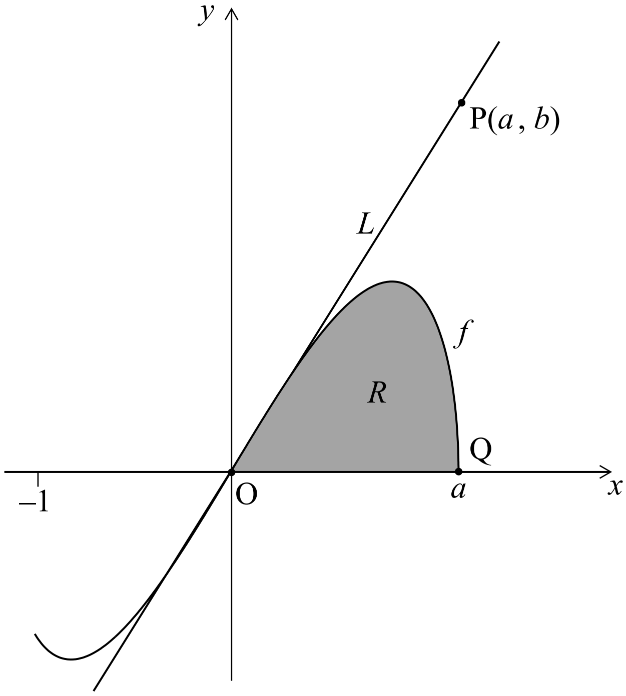
(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión para b en función de a. [6]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

El punto $\mathrm{Q}(a\,,\,0)$ pertenece al gráfico de f. Sea R la región delimitada por el gráfico de f y el eje x. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.



Sea A_R el área de la región R.

(b) Muestre que $A_R = \dfrac{2}{3}a^3$. [6]

(c) Sea A_T el área del triángulo OPQ. Sabiendo que $A_T = kA_R$, halle el valor de k. [4]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.