88137309

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

**MATEMÁTICAS**
**NIVEL MEDIO**
**PRUEBA 1**

Número de convocatoria del alumno

| 0 | 0 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Lunes 11 de noviembre de 2013 (tarde)

Código del examen

| 8 | 8 | 1 | 3 | – | 7 | 3 | 0 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[90 puntos]*.

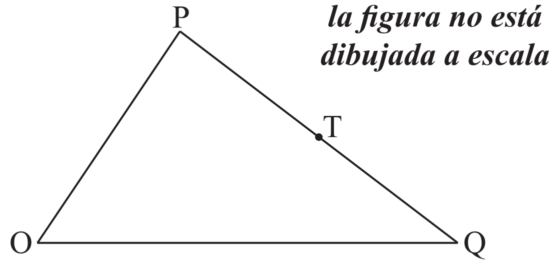
*No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.*

## SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

**1.** *[Puntuación máxima: 5]*

En la siguiente figura, $\vec{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{p}$, $\vec{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{q}$ y $\vec{\mathrm{PT}} = \frac{1}{2}\vec{\mathrm{PQ}}$.




Exprese cada uno de los siguientes vectores en función de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$;

(a) $\vec{\mathrm{QP}}$; *[2]*

(b) $\vec{\mathrm{OT}}$. *[3]*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2.** *[Puntuación máxima: 6]*

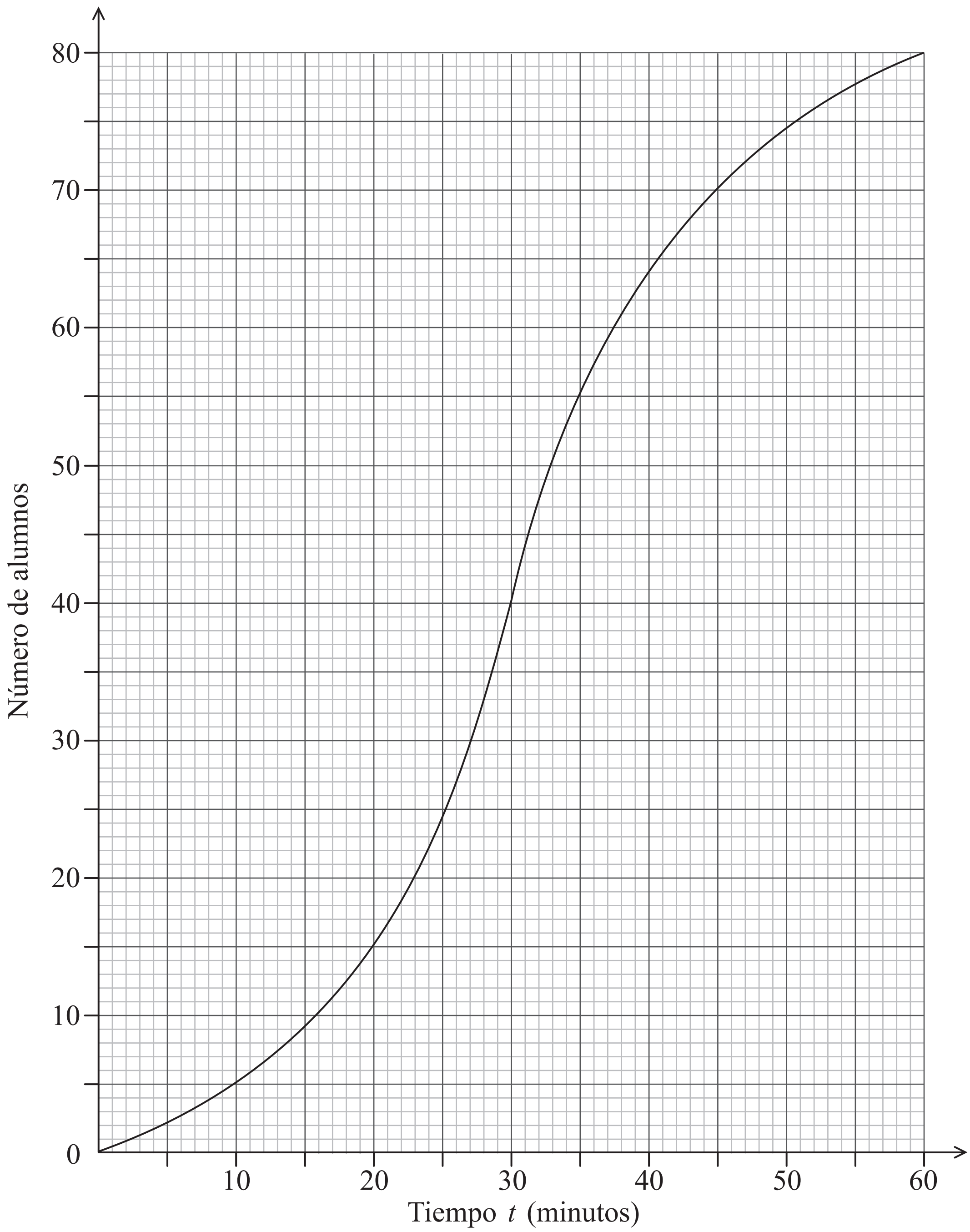
Sean $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Halle $\boldsymbol{AB}$. *[3]*

(b) Halle $\det(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{C})$. *[3]*

**3.** *[Puntuación máxima: 7]*

El siguiente diagrama es una curva de frecuencias acumuladas que representa el tiempo $t$, en minutos, que tardan 80 alumnos en acabar una tarea dada.




*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 3: continuación)*

(a) Halle el número de alumnos que completaron la tarea en menos de 45 minutos. *[2]*

(b) Halle el número de alumnos que tardaron entre 35 y 45 minutos en completar la tarea. *[3]*

(c) Sabiendo que hubo 50 alumnos que tardaron menos de $k$ minutos en completar la tarea, halle el valor de $k$. *[2]*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**4.** *[Puntuación máxima: 6]*

Considere una función $f(x)$ tal que $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x = 8$.

(a) Halle $\int_1^6 2f(x)\mathrm{d}x$. *[2]*

(b) Halle $\int_1^6 \left(f(x)+2\right)\mathrm{d}x$. *[4]*

**5.** *[Puntuación máxima: 7]*

Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k$. La gráfica de $f$ pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 6\right)$.

(a) Halle el valor de $k$. *[3]*

(b) Halle el valor mínimo de $f(x)$. *[2]*

Sea $g(x) = \operatorname{sen} x$. La gráfica de $g$ se traslada a la gráfica de $f$, mediante el vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

(c) Escriba el valor de $p$ el de $q$. *[2]*

**6.** *[Puntuación máxima: 6]*

Sea $f(x) = e^{2x}$. La recta $L$ es la tangente a la curva de $f$ en $(1, e^2)$.

Halle la ecuación de $L$ en la forma $y = ax + b$.

**7.** *[Puntuación máxima: 8]*

La ecuación $x^2 + (k+2)x + 2k = 0$ tiene dos raíces reales distintas.

Halle los posibles valores de $k$.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

## SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

**8.** *[Puntuación máxima: 14]*

Sean $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \dfrac{5}{3x}$, para $x \neq 0$.

(a) Halle $f^{-1}(x)$. *[2]*

(b) Compruebe que $\left(g \circ f^{-1}\right)(x) = \dfrac{5}{x+2}$. *[2]*

Sea $h(x) = \dfrac{5}{x+2}$, para $x \geq 0$. La gráfica de $h$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

(c) (i) Halle la intersección de la gráfica de $h$ con el eje $y$.

(ii) A partir de lo anterior, dibuje aproximadamente la gráfica de $h$. *[5]*

(d) Para la gráfica de $h^{-1}$,

(i) escriba la intersección con el eje $x$;

(ii) escriba la ecuación de la asíntota vertical. *[2]*

(e) Sabiendo que $h^{-1}(a) = 3$, halle el valor de $a$. *[3]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

**9.** *[Puntuación máxima: 16]*

Los tres primeros términos de una progresión geométrica infinita son $m-1$, $6$, $m+4$, donde $m \in \mathbb{Z}$.

(a) (i) Escriba una expresión para la razón común, $r$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que $m$ satisface la ecuación $m^2+3m-40=0$. *[4]*

(b) (i) Halle los dos posibles valores de $m$.

(ii) Halle los posibles valores de $r$. *[6]*

(c) La progresión tiene una suma finita.

(i) Indique cuál es el valor de $r$ que conduce a esta suma **y** justifique su respuesta.

(ii) Calcule la suma de los términos de la progresión. *[6]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

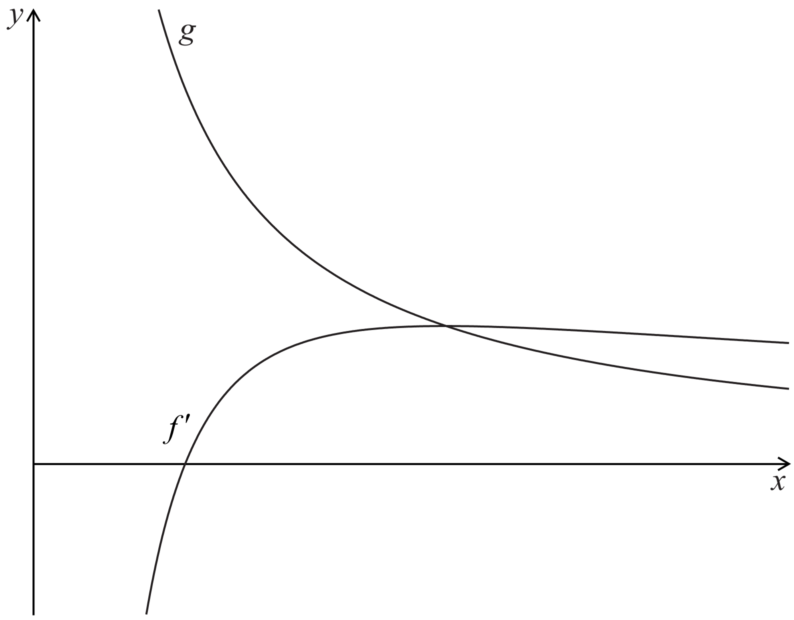
**10.** *[Puntuación máxima: 15]*

Sea $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ para $x > 0$.

(a) Compruebe que $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. *[2]*

(b) La gráfica de $f$ tiene un mínimo. Halle la coordenada $x$ de este mínimo. *[3]*

Sea $g(x) = \dfrac{1}{x}$. La siguiente figura muestra una parte de las gráficas de $f'$ y de $g$.




La gráfica de $f'$ corta al eje $x$ en $x = p$.

(c) Escriba el valor de $p$. *[2]*

La gráfica de $g$ y la gráfica de $f'$ se cortan en $x = q$.

(d) Halle el valor de $q$. *[3]*

(e) Sea $R$ la región delimitada por la gráfica de $f'$, la gráfica de $g$ y la recta $x = p$. Compruebe que el área de $R$ es igual a $\dfrac{1}{2}$. *[5]*