22107309

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Miércoles 5 de mayo de 2010 (tarde)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

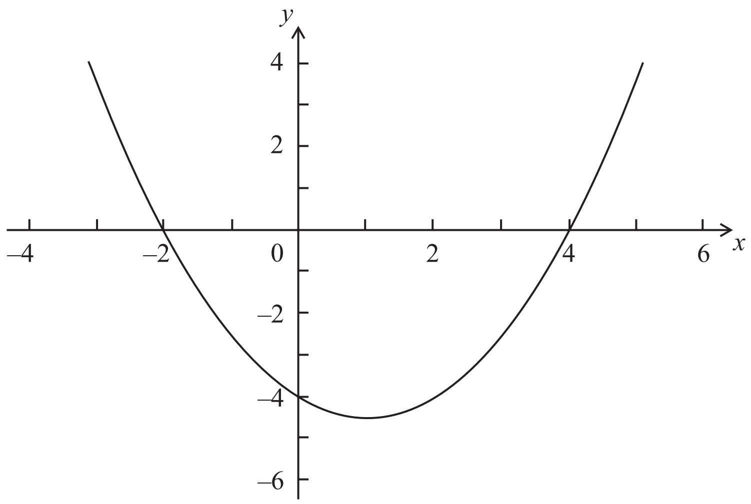
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea $f(x) = p(x-q)(x-r)$. A continuación se muestra una parte de la gráfica de f.



La gráfica pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, -4)$ y $(4, 0)$.

(a) Escriba el valor de q y el de r. *[2 puntos]*

(b) Escriba la **ecuación** del eje de simetría. *[1 punto]*

(c) Halle el valor de p. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 8]*

Sean $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Halle $\vec{BC}$. *[2 puntos]*

(b) Halle un vector unitario en la dirección de $\vec{AB}$. *[3 puntos]*

(c) Compruebe que $\vec{AB}$ es perpendicular a $\vec{AC}$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Sean $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Halle $\boldsymbol{AB}$. *[3 puntos]*

(b) Resuelva $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 7]*

Sean $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$.

(a) Halle $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *[2 puntos]*

(b) Halle $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *[2 puntos]*

(c) Sabiendo que $(g \circ f)(x)$ se puede escribir como $\cos(kx)$, halle el valor de k, $k \in \mathbb{Z}$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea $f(x) = kx^4$. El punto $\mathrm{P}(1, k)$ pertenece a la curva de f. En P, la recta normal a la curva es paralela a $y = -\frac{1}{8}x$. Halle el valor de *k*.

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Resuelva $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$, para $x > 2$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

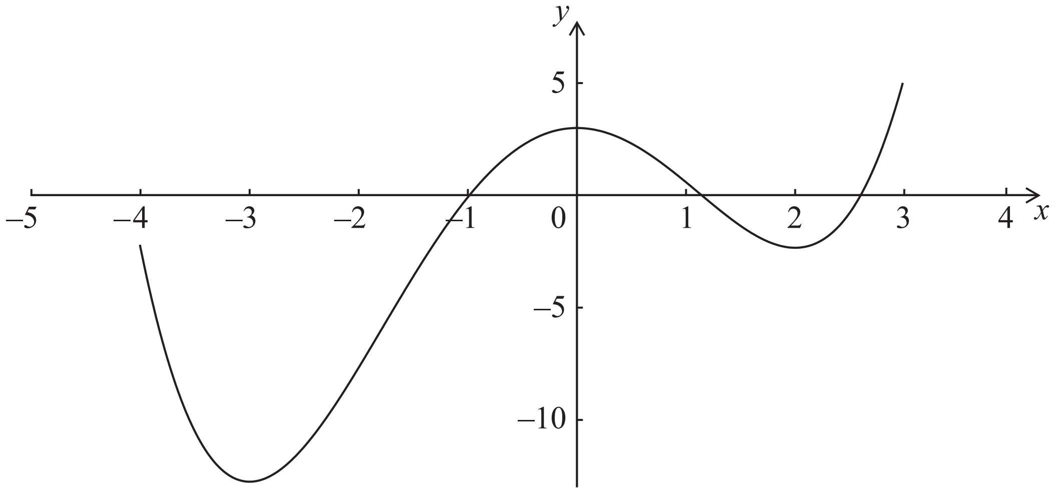
. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 6]*

Una función f está definida en el intervalo $-4 \le x \le 3$. A continuación se muestra la gráfica de f.



La gráfica presenta un máximo local para $x = 0$, y mínimos locales para $x = -3,\ x = 2$.

(a) Escriba las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función **derivada**, f'. *[2 puntos]*

(b) Escriba todos los valores de x para los cuales $f'(x)$ es positiva. *[2 puntos]*

(c) En el punto D, perteneciente a la gráfica de f, la coordenada x es $-0,5$. Explique por qué en el punto D $f''(x) < 0$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

NO *escriba en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

8. *[Puntuación máxima: 14]*

Considere la función f, cuya derivada segunda es $f''(x) = 3x - 1$. La gráfica de f tiene un punto mínimo en $\mathrm{A}(2, 4)$ y un punto máximo en $\mathrm{B}\left(-\frac{4}{3}, \frac{358}{27}\right)$.

(a) Utilice la derivada segunda para justificar que B es un máximo. *[3 puntos]*

(b) Sabiendo que $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + p$, compruebe que $p = -4$. *[4 puntos]*

(c) Halle $f(x)$. *[7 puntos]*

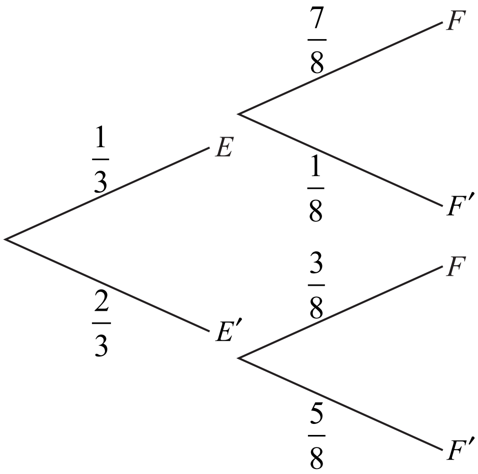
***NO** escriba en esta página.*

9. *[Puntuación máxima: 14]*

José va al colegio en autobús. Cada día, la probabilidad de que José pierda el autobús es igual a $\frac{1}{3}$. Si pierde el autobús, la probabilidad de que llegue tarde al colegio es igual a $\frac{7}{8}$. Si no pierde el autobús, la probabilidad de que llegue tarde al colegio es igual a $\frac{3}{8}$.

Sea E el suceso "pierde el autobús" y F el suceso "llega tarde al colegio".

La información anterior se muestra en el siguiente diagrama de árbol.



(a) Halle

(i) $\mathrm{P}(E \cap F)$;

(ii) $\mathrm{P}(F)$. *[4 puntos]*

(b) Halle la probabilidad de que

(i) José pierda el autobús y no llegue tarde al colegio;

(ii) José haya perdido el autobús, sabiendo que ha llegado tarde al colegio. *[5 puntos]*

Cada día que José coge el autobús, el coste del viaje es igual a 3 euros. José va al colegio el lunes y el martes.

(c) **Copie** y complete la siguiente tabla de distribución de probabilidad. *[3 puntos]*

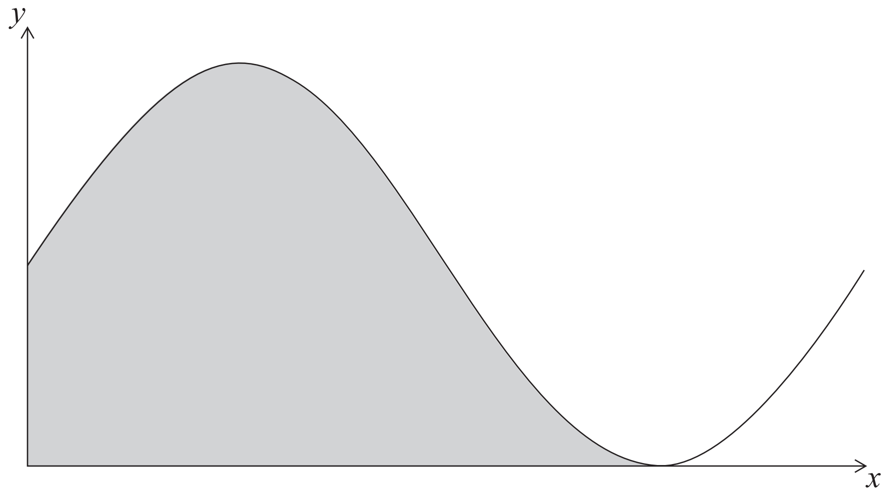
***X* (coste en euros)**	0	3	6
P (*X*)	$\frac{1}{9}$		

(d) Halle el coste esperado de José, para ambos días. *[2 puntos]*

NO *escriba en esta página.*

10. *[Puntuación máxima: 17]*

Sea $f(x) = 6 + 6\operatorname{sen} x$. A continuación se muestra una parte de la gráfica de f.



La región sombreada está delimitada por la curva de f, el eje x y el eje y.

(a) Resuelva, para $0 \le x < 2\pi$

(i) $6 + 6\operatorname{sen} x = 6$;

(ii) $6 + 6\operatorname{sen} x = 0$. *[5 puntos]*

(b) Escriba el valor exacto de la intersección con el eje x de la gráfica de f, para $0 \le x < 2\pi$. *[1 punto]*

(c) El área de la región sombreada es igual a k. Halle el valor de k; dé la respuesta en función de π. *[6 puntos]*

Sea $g(x) = 6 + 6\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. La gráfica de f se transforma en la gráfica de g.

(d) Dé una descripción geométrica completa de esta transformación. *[2 puntos]*

(e) Sabiendo que $\int_p^{p+\frac{3\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = k$ y $0 \le p < 2\pi$, escriba los dos valores de p. *[3 puntos]*