88097309

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Jueves 5 de noviembre de 2009 (tarde)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Página en blanco

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 8]*

Sean $f(x) = 2x^3 + 3$ y $g(x) = e^{3x} - 2$.

(a) (i) Halle $g(0)$.

(ii) Halle $(f \circ g)(0)$. *[5 puntos]*

(b) Halle $f^{-1}(x)$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Sean $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ p \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{w}$, halle el valor de p. *[3 puntos]*

(b) Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ 5 \end{pmatrix}$. Sabiendo que $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{42}$, halle los posibles valores de q. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

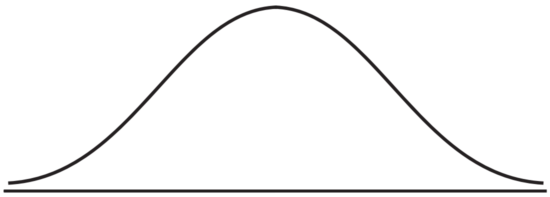
. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal, de media 100 cm y desviación típica 5 cm.

(a) Sobre la figura que aparece a continuación, sombree la región que representa $\mathrm{P}(X > 105)$. *[2 puntos]*



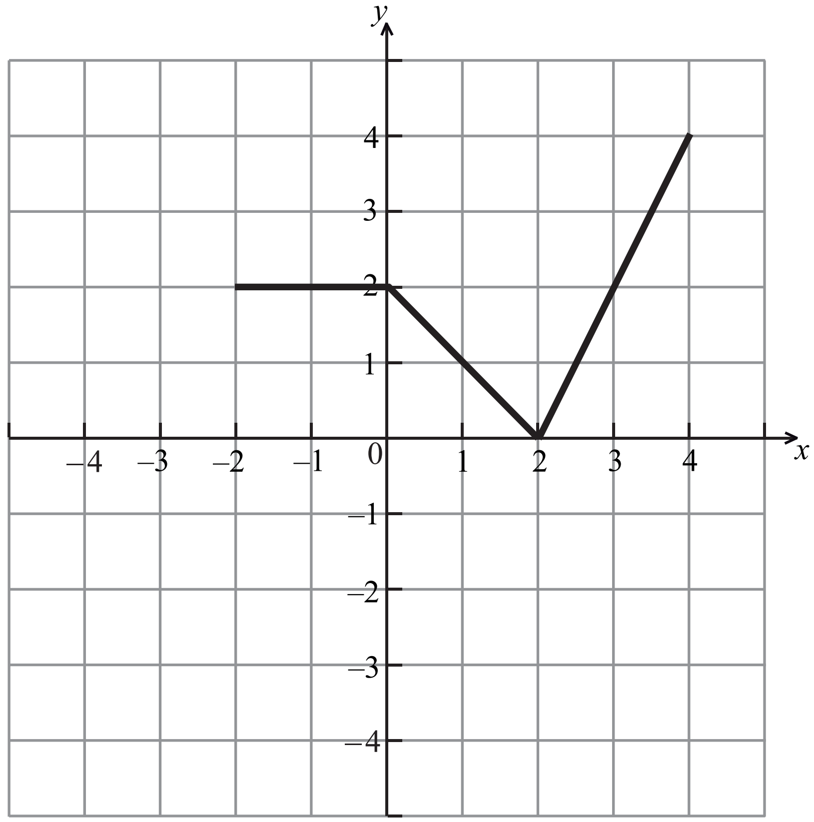
(b) Sabiendo que $\mathrm{P}(X < d) = \mathrm{P}(X > 105)$, halle el valor de d. *[2 puntos]*

(c) Sabiendo que $\mathrm{P}(X > 105) = 0{,}16$ (redondeando a dos cifras significativas), halle $\mathrm{P}(d < X < 105)$. *[2 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. *[Puntuación máxima: 5]*

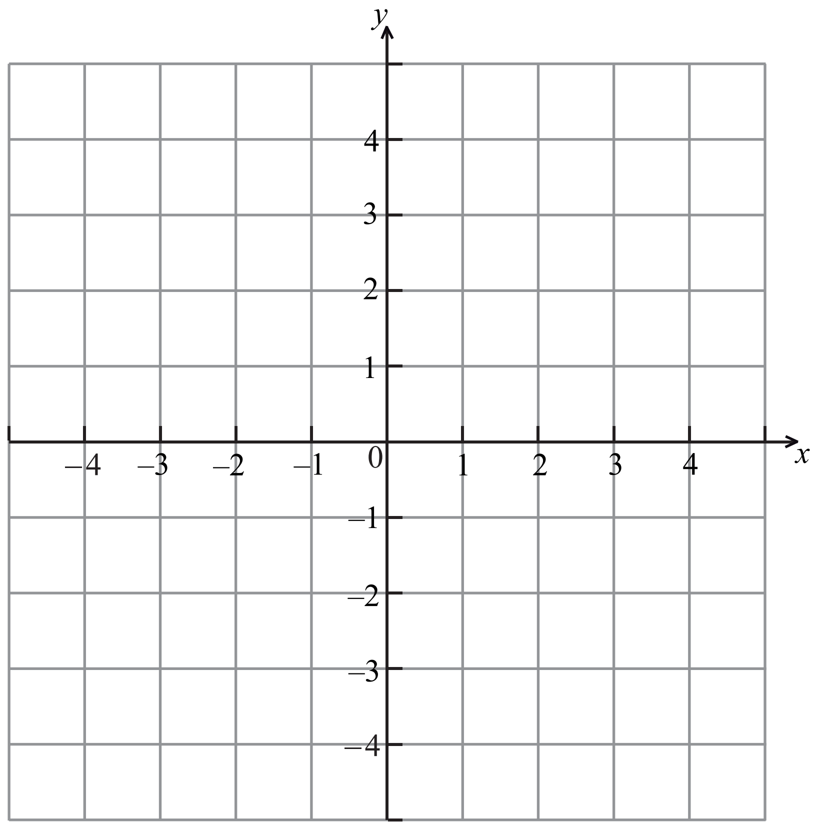
La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de una función $f(x)$, para $-2 \le x \le 4$.



(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 4: continuación)

(a) Sea $h(x) = f(-x)$. Dibuje aproximadamente la gráfica de h en la siguiente cuadrícula. *[2 puntos]*



(b) Sea $g(x) = \frac{1}{2} f(x-1)$. El punto $\mathrm{A}(3,\ 2)$ de la gráfica de f se transforma en el punto P de la gráfica de g. Halle las coordenadas de P. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere $f(x) = x^2 + \frac{p}{x}$, $x \neq 0$, donde p es una constante.

(a) Halle $f'(x)$. *[2 puntos]*

(b) Existe un mínimo de $f(x)$ en $x = -2$. Halle el valor de p. *[4 puntos]*

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Resuelva $\cos 2x - 3\cos x - 3 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, para $0 \le x \le 2\pi$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 7]*

Sea $f(x) = k\log_2 x$.

(a) Sabiendo que $f^{-1}(1) = 8$, halle el valor de k. *[3 puntos]*

(b) Halle $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

***NO** escriba en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

8. *[Puntuación máxima: 12]*

En una clase de 100 chicos, hay 55 chicos que practican fútbol y 75 chicos que practican rugby. Todos los chicos tienen que practicar al menos uno de los dos deportes (fútbol o rugby).

(a) (i) Halle el número de chicos que practican ambos deportes.

(ii) Escriba el número de chicos que practican solamente rugby. *[3 puntos]*

(b) Se elige un chico al azar.

(i) Halle la probabilidad de que este chico practique solamente un deporte.

(ii) Sabiendo que el chico elegido practica solamente un deporte, halle la probabilidad de que practique rugby. *[4 puntos]*

Sea A el suceso de que un chico practique fútbol y sea B el suceso de que un chico practique rugby.

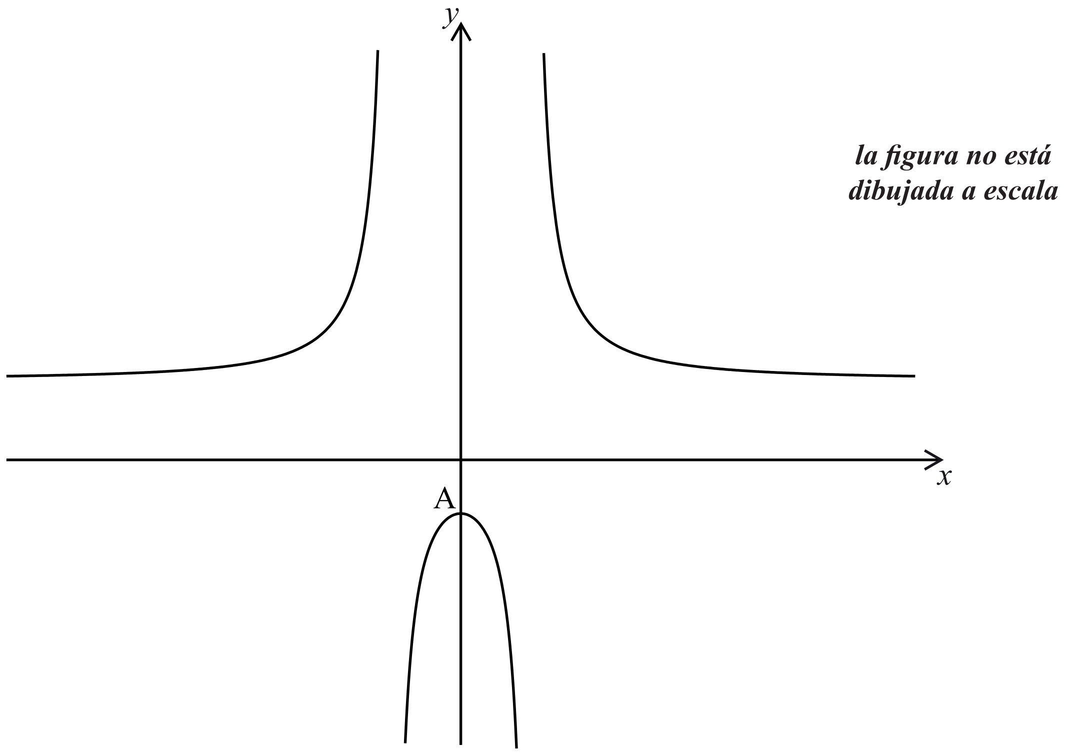
(c) Explique por qué A y B **no** son mutuamente excluyentes. *[2 puntos]*

(d) Compruebe que A y B **no** son independientes. *[3 puntos]*

***NO** escriba en esta página.*

9. *[Puntuación máxima: 16]*

Sea $f(x) = 3 + \dfrac{20}{x^2 - 4}$, para $x \neq \pm 2$. La gráfica de f se muestra a continuación.



La intersección con el eje y se produce en el punto A.

(a) (i) Halle las coordenadas de A.

(ii) Compruebe que $f'(x) = 0$ en A. *[7 puntos]*

(b) La segunda derivada es $f''(x) = \dfrac{40(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$. Utilice esto para

(i) justificar que la gráfica de f tiene un máximo local en A;

(ii) explicar por qué la gráfica de f **no** tiene punto de inflexión. *[6 puntos]*

(c) Describa el comportamiento de la gráfica de f para valores grandes del $|x|$. *[1 punto]*

(d) Escriba el recorrido de f. *[2 puntos]*

***NO** escriba en esta página.*

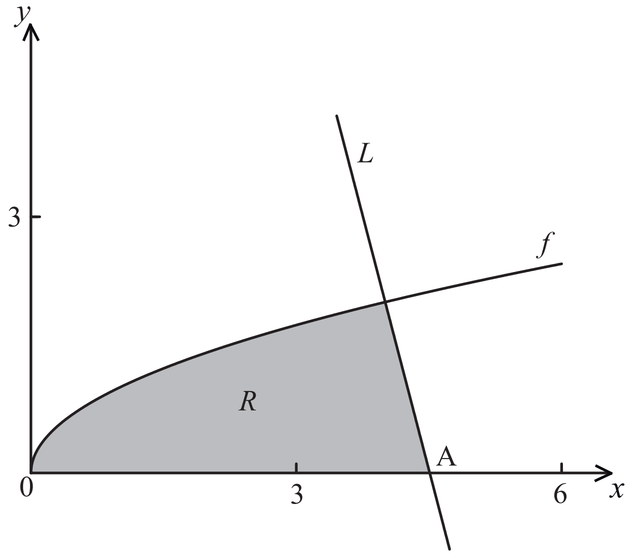
10. *[Puntuación máxima: 17]*

Sea $f(x)=\sqrt{x}$. La recta L es la normal a la gráfica de f en el punto $(4, 2)$.

(a) Compruebe que la ecuación de L es $y=-4x+18$. *[4 puntos]*

(b) En el punto A se produce la intersección de L con el eje x. Halle la coordenada x de A. *[2 puntos]*

En el siguiente diagrama, la región sombreada R está delimitada por el eje x, la gráfica de f y la recta L.



(c) Halle una expresión para el área de R. *[3 puntos]*

(d) La región R se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido generado, y dé su respuesta en función de π. *[8 puntos]*