

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

**Mathématiques**  
**Niveau supérieur**  
**Épreuve 3 – ensembles, relations et groupes**

Mardi 10 novembre 2020 (après-midi)

1 heure

---

**Instructions destinées aux candidats**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 5]

Considérez deux sous-ensembles,  $A$  et  $B$ , d'un ensemble universel  $U$ .

(a) Dessinez un diagramme de Venn pour illustrer

(i)  $(A \cup B)'$ ;

(ii)  $A' \cup B'$ . [2]

(b) Utilisez les lois des opérations sur les ensembles pour montrer que  $A \cap (A \cap B)' = A \setminus B$ . [3]

2. [Note maximale : 10]

La relation  $R$  est définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par  $(a, b)R(c, d)$ , si et seulement si,  $b - a = d - c$ .

(a) Prouvez que  $R$  est une relation d'équivalence. [5]

(b) (i) Trouvez deux éléments de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans la même classe d'équivalence que  $(1, 3)$ .

(ii) Décrivez géométriquement la classe d'équivalence contenant  $(1, 3)$ .

(iii) Décrivez géométriquement les classes d'équivalence de la relation  $R$ . [5]

3. [Note maximale : 5]

La fonction  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est définie par  $g(x, y) = (xy, x + y)$ .

(a) Donnez un exemple pour démontrer que  $g$  n'est pas injective. [2]

(b) Montrez que  $g$  n'est pas surjective. [3]

4. [Note maximale : 18]

L'opération binaire  $*$  est définie sur l'ensemble  $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $a * b = a + b - ab$ , pour tout  $a, b \in S$ .

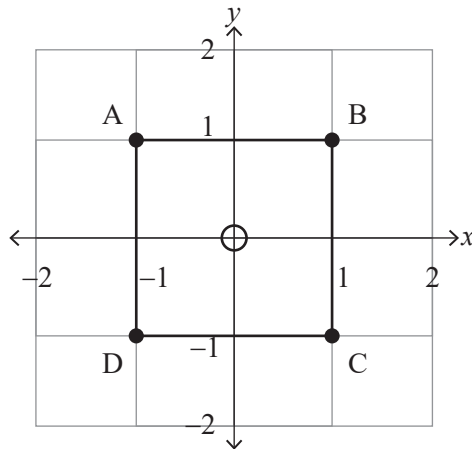
- (a) Trouvez l'élément neutre. [2]
- (b) Montrez que  $*$  est associative. [3]
- (c) Résolvez  $x * x * x * x = -8$ . [5]
- (d) Montrez que tout élément de  $S$  a un symétrique. [2]
- (e) À partir de là, montrez que  $\{S, *\}$  est un groupe. [3]

L'ensemble  $H = \{0, 2\}$ .  $\{H, *\}$  est un sous-groupe de  $\{S, *\}$ .

- (f) (i) Trouvez  $4H$ , la classe à gauche de  $H$  par rapport à 4.
- (ii) Résolvez  $nH = 4H$ . [3]

5. [Note maximale : 12]

Considérez le carré  $ABCD$  dont les sommets sont  $A(-1 ; 1)$ ,  $B(1 ; 1)$ ,  $C(1 ; -1)$  et  $D(-1 ; -1)$ , tel que montré dans le diagramme suivant.



L'ensemble des sommets du carré est  $V = \{A, B, C, D\}$ . Une réflexion du carré par rapport à la droite  $x = 0$  peut être représentée par la permutation  $(AB)(CD)$  qui donne la position finale des sommets.

(a) Décrivez la transformation géométrique unique représentée par la permutation

(i)  $(ABCD)$ ;

(ii)  $(AC)$ .

[4]

(b) Trouvez la permutation qui représente

(i) une rotation de  $180^\circ$  autour de  $(0 ; 0)$ ;

(ii) une réflexion par rapport à la droite  $y = 0$ .

[2]

Les permutations qui représentent les huit symétries du carré forment un groupe  $\{G, \circ\}$ , où  $\circ$  est l'opération de composition de permutations.

(c) Trouvez la permutation unique qui représente  $(ABCD) \circ (AC)$ .

[2]

Soit la permutation neutre représentée par  $e$ .

(d) Trouvez un sous-groupe cyclique de  $G$  d'ordre 4.

[2]

(e) Trouvez un sous-groupe non cyclique de  $G$  d'ordre 4.

[2]