Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 2

Martes 13 de noviembre de 2018 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

8818 – 7226

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Considere una progresión geométrica donde el primer término es 4 y el cuarto término es $-2{,}916$.

(a) Halle la razón común de esta progresión. [3]

(b) Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 7]

Una función f cumple las condiciones $f(0) = -4$, $f(1) = 0$, y su segunda derivada $f''(x) = 15\sqrt{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$, $x \geq 0$.

Halle $f(x)$.

3. [Puntuación máxima: 8]

Se sabe que el 56 % de las pilas Infiglow duran menos de 16 horas y que el 94 % duran menos de 17 horas. Se puede suponer que la duración de estas pilas sigue una distribución normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Halle el valor de μ y el valor de σ. [6]

(b) Halle la probabilidad de que una pila Infiglow elegida al azar dure al menos 15 horas. [2]

4. [Puntuación máxima: 5]

Halle el valor del término constante del desarrollo de $x^4\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5$.

5. [Puntuación máxima: 5]

Derive la función $f(x) = 3x^3 - x$ utilizando la definición de derivada.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 6]

Sea $P(x) = 2x^4 - 15x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Sabiendo que $(x - 5)$ es un factor de $P(x)$, halle una expresión que relacione a, b y c. [2]

(b) Sabiendo que $(x - 5)^2$ es un factor de $P(x)$, escriba el valor de $P'(5)$. [1]

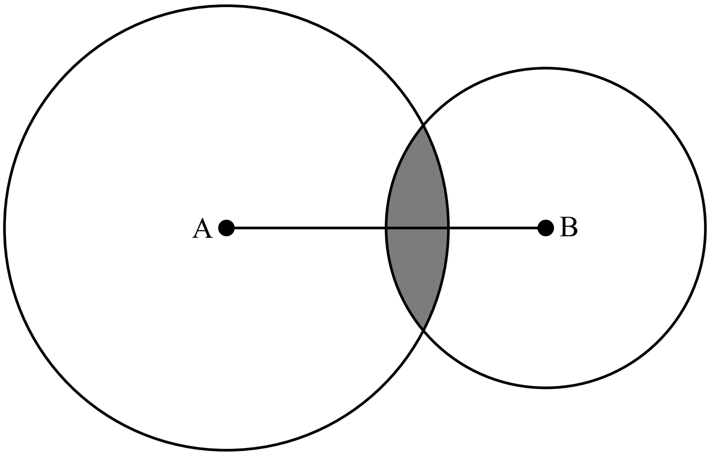
(c) Sabiendo que $(x - 5)^2$ es un factor de $P(x)$, y que $a = 2$, halle los valores de b y c. [3]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

7. [Puntuación máxima: 6]

El barco A se encuentra a 10 km de distancia del barco B. Cada barco lleva a bordo un transmisor de radio. El transmisor del barco A tiene un alcance de 7 km y el transmisor del barco B tiene un alcance de 5 km. En el siguiente diagrama la zona sombreada representa la región en la que se puede detectar los dos transmisores. Halle el área de esta región.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

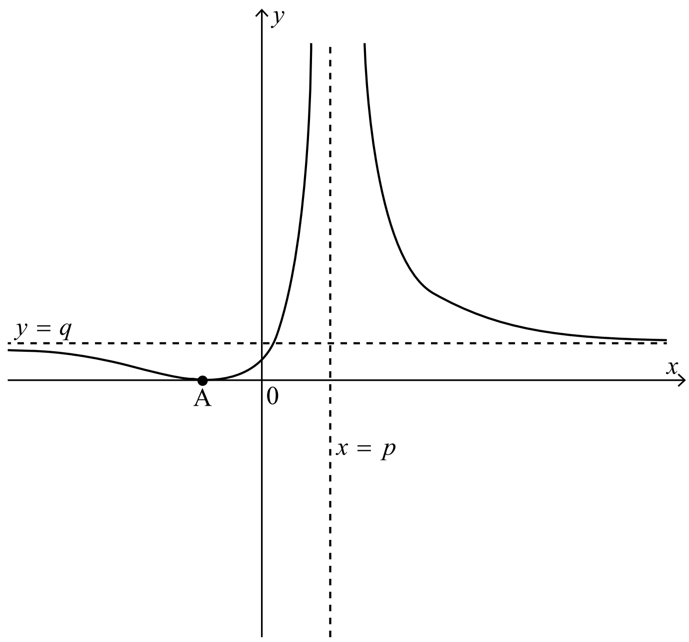
. . . .

. . . .

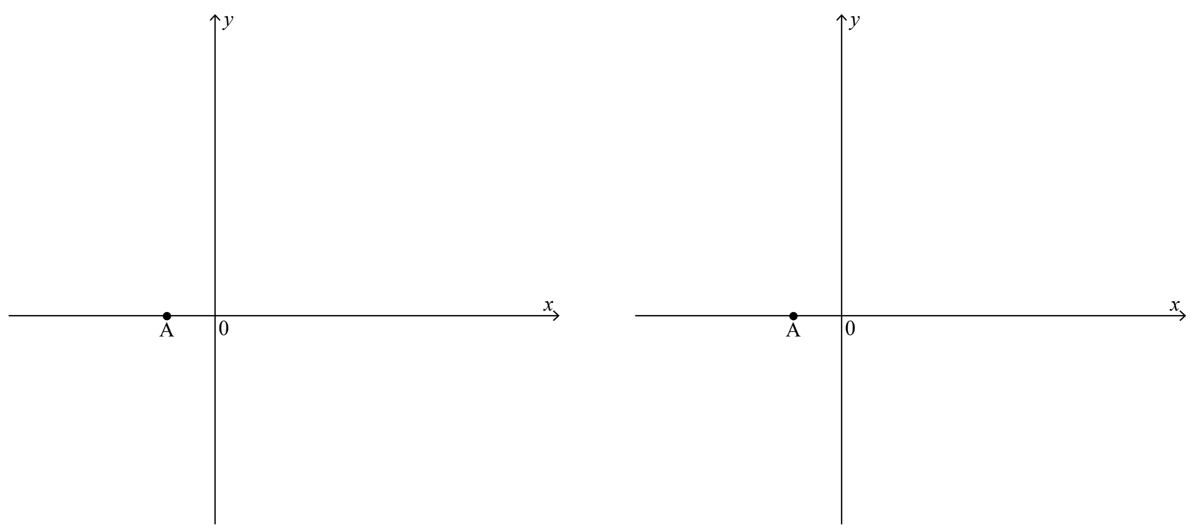
8. [Puntuación máxima: 8]

Considere la función $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}$, $x \neq -\dfrac{c}{b}$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

El siguiente gráfico muestra la curva $y = \left(f(x)\right)^2$. Esta curva tiene por asíntotas $x = p$ e $y = q$ y toca al eje x en A.



(a) En los siguientes ejes de coordenadas cartesianas, dibuje aproximadamente los dos posibles gráficos de $y = f(x)$ y dé la ecuación de las asíntotas en función de p y q. [4]



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 8: continuación)

(b) Sabiendo que $p=\frac{4}{3}$, $q=\frac{4}{9}$ y que A tiene por coordenadas $\left(-\frac{1}{2},\,0\right)$, determine los posibles conjuntos de valores que pueden tener a, b y c. [4]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 19]

La función f está definida por $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x - 3}$, $0 < x < 3$.

(a) Halle $f'(x)$. [4]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle las coordenadas del punto de inflexión que tiene el gráfico de $y = f(x)$. [4]

(c) Dibuje un sistema de ejes cartesianos en los que x e y varían entre -3 y 3. Sobre los mismos

(i) dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, mostrando con claridad cualquier corte con los ejes y dando las ecuaciones de cualquier asíntota que hubiera.

(ii) dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f^{-1}(x)$, mostrando con claridad cualquier corte con los ejes y dando las ecuaciones de cualquier asíntota que hubiera. [8]

(d) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva la inecuación $f(x) > f^{-1}(x)$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 18]

Willow se da cuenta de que cada día laborable recibe unos 70 correos electrónicos. Por ello, decide modelizar el número de correos electrónicos que recibe cada día laborable utilizando la variable aleatoria X, donde X sigue una distribución de Poisson de media 70.

(a) Utilizando este modelo de distribución, halle

(i) $\mathrm{P}(X < 60)$

(ii) la desviación típica de X. [4]

(b) Con el fin de contrastar la validez de este modelo, Willow va anotando el número de correos electrónicos que recibe cada día laborable durante un período de 6 meses. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Número de correos electrónicos recibidos (x)	**Número de días**
$40 \le x \le 49$	2
$50 \le x \le 59$	15
$60 \le x \le 69$	40
$70 \le x \le 79$	53
$80 \le x \le 89$	0
$90 \le x \le 99$	1
$100 \le x \le 109$	3
$110 \le x \le 119$	6

A partir de los datos de la tabla, calcule

(i) una estimación de la media del número de correos electrónicos que recibe cada día laborable;

(ii) una estimación de la desviación típica del número de correos electrónicos que recibe cada día laborable. [5]

(c) Dé una razón que sugiera que el modelo Poisson de Willow no es un buen ajuste. [1]

Archie trabaja para otra empresa y sabe que el número de correos electrónicos que recibe sigue una distribución de Poisson, con una media de λ correos electrónicos al día.

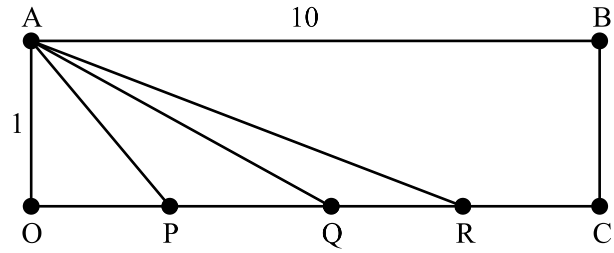
(d) Suponga que la probabilidad de que Archie reciba en un día cualquiera un total de más de 10 emails es 0,99. Halle el valor de λ. [3]

(e) Ahora suponga que Archie recibió un total de exactamente 20 emails durante un período de dos días consecutivos. Muestre que la probabilidad de que haya recibido exactamente 10 durante el primer día es independiente de λ . [5]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 13]

Considere el rectángulo OABC, tal que $\mathrm{AB} = \mathrm{OC} = 10$ y $\mathrm{BC} = \mathrm{OA} = 1$. Los puntos P, Q y R pertenecen a la recta OC, siendo $\mathrm{OP} = p$, $\mathrm{OQ} = q$, $\mathrm{OR} = r$, y tal que $0 < p < q < r < 10$.



Sea θ_p el ángulo APO, θ_q el ángulo AQO y θ_r el ángulo ARO.

(a) Halle una expresión para θ_p en función de p. [3]

Considere el caso particular en el que $\theta_p = \theta_q + \theta_r$ y $\mathrm{QR} = 1$.

(b) Muestre que $p = \dfrac{q^2 + q - 1}{2q + 1}$. [6]

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de p en función de q y, con ello, determine el intervalo de valores de p para los cuales existen valores posibles de q. [4]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.