Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

Miércoles 9 de mayo de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

2218 – 7229

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 13]

La operación binaria multiplicación módulo 10, denotada mediante $\times_{10}$, se define sobre el conjunto $T = \{2, 4, 6, 8\}$ y aparece representada en la siguiente tabla de Cayley.

$\times_{10}$	**2**	**4**	**6**	**8**
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

(a) Muestre que $\{T, \times_{10}\}$ es un grupo. (Puede dar por supuesto que se cumple la propiedad asociativa.) [4]

(b) Haciendo referencia a la tabla de Cayley, explique por qué T es abeliano. [1]

(c) (i) Halle el orden de cada elemento de $\{T, \times_{10}\}$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\{T, \times_{10}\}$ es cíclico y escriba todos sus generadores. [6]

La operación binaria multiplicación módulo 10, denotada mediante $\times_{10}$, se define sobre el conjunto $V = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

(d) Muestre que $\{V, \times_{10}\}$ no es un grupo. [2]

2. [Puntuación máxima: 8]

(a) Considere los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ y $C = \{1, 3, 7, 15, 31\}$.

(i) Halle $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ii) Verifique que $A \setminus C \neq C \setminus A$. [5]

Sea S un conjunto que contiene n elementos, donde $n \in \mathbb{N}$.

(b) Muestre que S tiene 2^n subconjuntos. [3]

3. [Puntuación máxima: 8]

La relación R se define de modo tal que xRy si y solo si $|x| + |y| = |x + y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que R es

(i) reflexiva;

(ii) simétrica. [4]

(b) Muestre mediante un ejemplo que R no es transitiva. [4]

4. [Puntuación máxima: 12]

El conjunto de todas las permutaciones de la lista de números enteros $1, 2, 3, 4$ forma un grupo, S_4, con respecto a la operación de composición de funciones.

(a) Determine el orden de S_4. [2]

En el grupo S_4 sean $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Halle el subgrupo propio H de orden 6 que contiene a p_1, p_2 y a sus composiciones. Exprese cada elemento de H en forma de ciclo. [5]

Sea $f: S_4 \to S_4$ la función definida mediante $f(p) = p \circ p$ para $p \in S_4$.

(c) Utilizando p_1 y p_2, explique por qué f no es un homomorfismo. [5]

5. [Puntuación máxima: 9]

La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ se define mediante $f(n) = n + (-1)^n$.

(a) Demuestre que $f \circ f$ es la función identidad. [6]

(b) Muestre que

(i) f es inyectiva;

(ii) f es sobreyectiva. [3]