Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – mathématiques discrètes

Mercredi 9 mai 2018 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

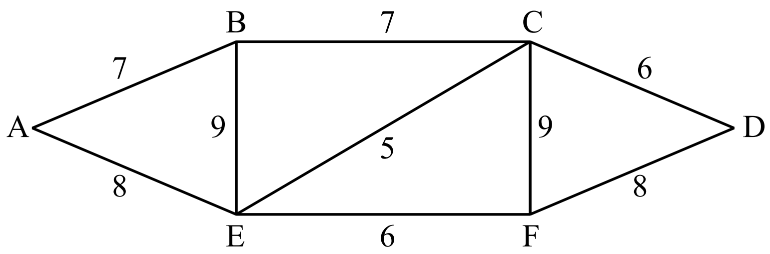
2218 – 7221

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 10]

Considérez le graphe pondéré G suivant.



(a) Indiquez quelle caractéristique de G garantit que

(i) G possède une chaîne eulérienne ;

(ii) G ne possède pas un circuit eulérien. [2]

(b) Écrivez une chaîne eulérienne dans G. [2]

(c) (i) Indiquez le problème du facteur chinois.

(ii) En commençant et en finissant en B, trouvez une solution au problème du facteur chinois pour G.

(iii) Calculez le poids total de la solution. [6]

2. [Note maximale : 8]

(a) Indiquez le petit théorème de Fermat. [2]

(b) Considérez la congruence linéaire $ax \equiv b(\bmod p)$, où a, b, p, $x \in \mathbb{Z}^+$, p est premier et a n'est pas un multiple de p.

(i) Utilisez le petit théorème de Fermat pour montrer que $x \equiv a^{p-2}b(\bmod p)$.

(ii) À partir de là, résolvez la congruence linéaire $5x \equiv 7(\bmod 13)$. [6]

3. [Note maximale : 11]

Considérons le graphe biparti complet $\kappa_{3,3}$.

(a) (i) Dessinez $\kappa_{3,3}$.

(ii) Montrez que $\kappa_{3,3}$ possède un cycle hamiltonien.

(iii) Dessinez $\kappa_{3,2}$ et expliquez pourquoi il ne possède pas de cycle hamiltonien. [4]

(b) (i) Dans le contexte de la théorie des graphes, indiquez le lemme des poignées de main.

(ii) À partir de là, montrez qu'un graphe G ayant la suite de degrés 2, 3, 3, 4, 4, 5 ne peut pas exister. [3]

Soit T un arbre ayant v sommets, où $v \geq 2$.

(c) Utilisez le lemme des poignées de main pour prouver que T possède au moins deux sommets de degré un. [4]

4. [Note maximale : 6]

(a) Montrez que $\text{pgcd}(4k+2\,,3k+1) = \text{pgcd}(k-1\,,2)$, où $k \in \mathbb{Z}^+, k > 1$. [4]

(b) Indiquez la valeur du $\text{pgcd}(4k+2\,,3k+1)$ pour

(i) des entiers impairs strictement positifs k;

(ii) des entiers pairs strictement positifs k. [2]

5. [Note maximale : 15]

La suite de Fibonacci peut être décrite par la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, où $f_0 = 0\,, f_1 = 1$.

(a) Écrivez l'équation caractéristique et utilisez-la pour trouver une expression pour f_n en fonction de n. [7]

On sait que $\alpha^2 = \alpha + 1$, où $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Pour des entiers $n \geq 3$, utilisez la récurrence forte sur la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour prouver que $f_n > \alpha^{n-2}$. [8]