Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 2

Jueves 3 de mayo de 2018 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

12 páginas

2218 – 7226

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

Considere el número complejo $z = \dfrac{2 + 7\mathrm{i}}{6 + 2\mathrm{i}}$.

(a) Exprese z en la forma $a + \mathrm{i}b$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$. [2]

(b) Halle el valor exacto del módulo de z. [2]

(c) Halle el argumento de z, con una aproximación de 4 lugares decimales. [2]

2. [Puntuación máxima: 5]

El polinomio $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + 6$ es exactamente divisible entre $(x-1)$, entre $(x-2)$ y entre $(x-3)$.

Halle los valores de p, q y r.

3. [Puntuación máxima: 6]

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 16$.

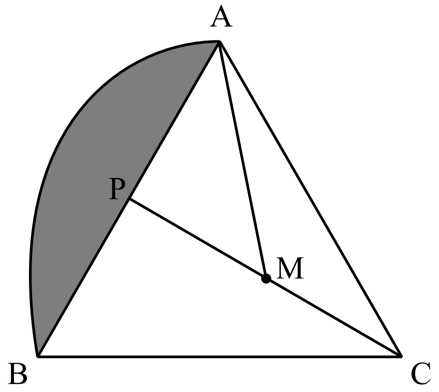
(a) Dibuje aproximadamente la función densidad de probabilidad correspondiente a X, y sombree la región que representa $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$. [2]

(b) Halle el valor de $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$. [2]

(c) Halle el valor de k para el cual $\mathrm{P}(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0{,}5$. [2]

4. [Puntuación máxima: 8]

Considere la siguiente figura.



Los lados del triángulo equilátero ABC tienen longitudes de $1\,\mathrm{m}$. P es el punto medio de $[\mathrm{AB}]$. El arco de circunferencia AB tiene por centro M, el punto medio de $[\mathrm{CP}]$.

(a) (i) Halle AM.

(ii) Halle $\mathrm{A\hat{M}P}$ en radianes. [5]

(b) Halle el área de la región sombreada. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. [Puntuación máxima: 6]

(a) Exprese el coeficiente binomial $\begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n-2 \end{pmatrix}$ como un polinomio en n. [3]

(b) A partir de lo anterior, halle el menor valor de n para el cual $\begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n-2 \end{pmatrix} > 10^6$. [3]

6. [Puntuación máxima: 7]

Utilice la inducción matemática para demostrar que $(1-a)^n > 1 - na$ para $\{n : n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2\}$, donde $0 < a < 1$.

7. [Puntuación máxima: 5]

Un punto P se mueve en línea recta. Su velocidad $v\ \mathrm{ms}^{-1}$ en el instante t segundos viene dada por $v(t) = \mathrm{e}^{-t} - 8t^2\mathrm{e}^{-2t}$, donde $t \geq 0$.

(a) Determine el primer instante t_1 en el que P tiene velocidad cero. [2]

(b) (i) Halle una expresión para la aceleración de P en el instante t.

(ii) Halle el valor de la aceleración de P en el instante t_1. [3]

8. [Puntuación máxima: 7]

La variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p.
Se sabe que $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$.

(a) Halle el menor valor posible de n. [2]

Se sabe además que $\mathrm{P}(X \leq 1) = 0{,}09478$ con una aproximación de 4 cifras significativas.

(b) Determine el valor de n y el valor de p. [5]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 13]

El número de taxis que llegan a la estación de trenes de Cardiff Central se puede modelizar por una distribución de Poisson. Durante las horas del día de mayor afluencia de viajeros los taxis llegan a razón media de 5,3 taxis cada 10 minutos. Sea T un período aleatorio de 10 minutos perteneciente a esas horas de mayor afluencia.

(a) (i) Halle la probabilidad de que durante T lleguen exactamente 4 taxis.

(ii) Halle el número más probable de taxis que llegarían durante T.

(iii) Sabiendo que durante T llegan más de 5 taxis, halle la probabilidad de que durante T lleguen exactamente 7 taxis. [7]

Durante las horas tranquilas del día los taxis llegan a razón media de 1,3 taxis cada 10 minutos.

(b) Halle la probabilidad de que durante un período de 15 minutos —en el cual los primeros 10 minutos son de mayor afluencia de viajeros y los siguientes 5 minutos son tranquilos— lleguen exactamente 2 taxis. [6]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 18]

Considere la expresión $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\text{cotan}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

(a) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$ para $-\frac{5\pi}{8} \le x \le \frac{\pi}{8}$.

(ii) Haciendo referencia al gráfico anterior, explique por qué f es una función en el dominio dado.

(iii) Explique por qué f no tiene inversa en el dominio dado.

(iv) Explique por qué f no es una función para $-\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$. [5]

La expresión de $f(x)$ se puede escribir como $g(t)$, donde $t = \tan x$.

(b) Muestre que $g(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$. [3]

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(t)$ para $t \le 0$. Dé las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de todas las asíntotas. [3]

(d) Sean α, β las raíces de $g(t) = k$, donde $0 < k < 1$.

(i) Halle α y β en función de k.

(ii) Muestre que $\alpha + \beta < -2$. [7]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 19]

Una curva C viene dada por la ecuación implícita $x + y - \cos(xy) = 0$.

(a) Muestre que $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1 + y\,\text{sen}(xy)}{1 + x\,\text{sen}(xy)}\right)$. [5]

(b) La curva $xy = -\frac{\pi}{2}$ y C se cortan en P y en Q.

(i) Halle las coordenadas de P y de Q.

(ii) Sabiendo que las pendientes de las tangentes a C en P y en Q son m_1 y m_2, respectivamente, muestre que $m_1 \times m_2 = 1$. [7]

(c) Halle las coordenadas de los tres puntos de C más próximos al origen de coordenadas en los que la tangente es paralela a la recta $y = -x$. [7]