Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 2

Jeudi 3 mai 2018 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

2218 – 7220

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Considérez le nombre complexe $z = \dfrac{2 + 7\mathrm{i}}{6 + 2\mathrm{i}}$.

(a) Exprimez z sous la forme $a + \mathrm{i}b$, où $a, b \in \mathbb{Q}$. [2]

(b) Trouvez la valeur exacte du module de z. [2]

(c) Trouvez l'argument de z, en donnant votre réponse avec une précision de 4 décimales. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Note maximale : 5]

Le polynôme $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + 6$ est divisible sans reste par $(x - 1)$, par $(x - 2)$ et par $(x - 3)$.

Trouvez les valeurs de p, q et r.

3. [Note maximale : 6]

La variable aléatoire X suit une distribution normale de moyenne $\mu = 50$ et de variance $\sigma^2 = 16$.

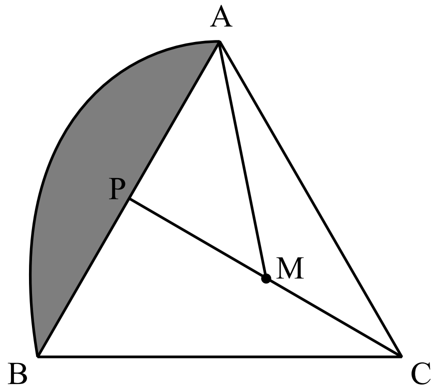
(a) Esquissez la fonction de densité pour X, et colorez la région correspondant à $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$. [2]

(b) Trouvez la valeur de $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$. [2]

(c) Trouvez la valeur de k pour laquelle $\mathrm{P}(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0,5$. [2]

4. [Note maximale : 8]

Considérez le diagramme suivant.



Les côtés du triangle équilatéral ABC sont de longueur égale à $1\,\mathrm{m}$. Le milieu de $[\mathrm{AB}]$ est désigné par P. L'arc de cercle AB est centré en M, le milieu de $[\mathrm{CP}]$.

(a) (i) Trouvez AM.

(ii) Trouvez $\mathrm{A\hat{M}P}$ en radians. [5]

(b) Trouvez l'aire de la région grisée. [3]

5. [Note maximale : 6]

(a) Exprimez le coefficient binomial $\binom{3n+1}{3n-2}$ comme un polynôme en n. [3]

(b) À partir de là, trouvez la plus petite valeur de n pour laquelle $\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Note maximale : 7]

Utilisez la récurrence pour prouver que $(1-a)^n > 1 - na$ pour $\{n : n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2\}$, où $0 < a < 1$.

7. [Note maximale : 5]

Un point P se déplace en ligne droite avec une vitesse de $v\ \mathrm{ms}^{-1}$, donnée par $v(t) = \mathrm{e}^{-t} - 8t^2\mathrm{e}^{-2t}$ à l'instant t secondes, où $t \geq 0$.

(a) Déterminez la première fois, t_1, où P a une vitesse nulle. [2]

(b) (i) Trouvez une expression pour l'accélération de P à l'instant t.

(ii) Trouvez la valeur de l'accélération de P à l'instant t_1. [3]

8. [Note maximale : 7]

La variable aléatoire X suit une distribution binomiale de paramètres n et p.
On donne $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$.

(a) Trouvez la plus petite valeur possible de n. [2]

On donne également $\mathrm{P}(X \leq 1) = 0{,}09478$ avec une précision de 4 chiffres significatifs.

(b) Déterminez la valeur de n et la valeur de p. [5]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

9. [Note maximale : 13]

Le nombre de taxis arrivant à la gare centrale de Cardiff peut être modélisé par une distribution de Poisson. Lors des périodes chargées de la journée, les taxis arrivent à un taux moyen de 5,3 taxis par période de 10 minutes. Soit T une période chargée de 10 minutes choisie au hasard.

(a) (i) Trouvez la probabilité qu’exactement 4 taxis arrivent au cours de T.

(ii) Trouvez le nombre le plus probable de taxis qui arriveraient au cours de T.

(iii) Étant donné que plus de 5 taxis arrivent au cours de T, trouvez la probabilité qu’exactement 7 taxis arrivent au cours de T. [7]

Lors des périodes calmes de la journée, les taxis arrivent à un taux moyen de 1,3 taxi par période de 10 minutes.

(b) Trouvez la probabilité qu’exactement 2 taxis arrivent au cours d’une période de 15 minutes, dont les 10 premières minutes sont chargées et les 5 minutes restantes sont calmes. [6]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

10. [Note maximale : 18]

Considérez l'expression $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

(a) (i) Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$ pour $-\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8}$.

(ii) En faisant référence à votre représentation graphique, expliquez pourquoi f est une fonction sur le domaine donné.

(iii) Expliquez pourquoi f n'a pas de réciproque sur le domaine donné.

(iv) Expliquez pourquoi f n'est pas une fonction pour $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. [5]

L'expression $f(x)$ peut être écrite comme $g(t)$, où $t = \tan x$.

(b) Montrez que $g(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$. [3]

(c) Esquissez la représentation graphique de $y = g(t)$ pour $t \leq 0$. Donnez les coordonnées de tout point d'intersection avec les axes et les équations de toute asymptote. [3]

(d) Soit α, β les racines de $g(t) = k$, où $0 < k < 1$.

(i) Trouvez α et β en fonction de k.

(ii) Montrez que $\alpha + \beta < -2$. [7]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 19]

Une courbe C est donnée par l’équation implicite $x + y - \cos(xy) = 0$.

(a) Montrez que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{1 + y\sin(xy)}{1 + x\sin(xy)}\right)$. [5]

(b) La courbe $xy = -\frac{\pi}{2}$ coupe C en P et en Q.

(i) Trouvez les coordonnées de P et Q.

(ii) Étant donné que les pentes des tangentes à C en P et Q sont respectivement m_1 et m_2, montrez que $m_1 \times m_2 = 1$. [7]

(c) Trouvez les coordonnées des trois points de C les plus près de l’origine, où la tangente est parallèle à la droite $y = -x$. [7]