Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Miércoles 2 de mayo de 2018 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

2218 – 7225

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

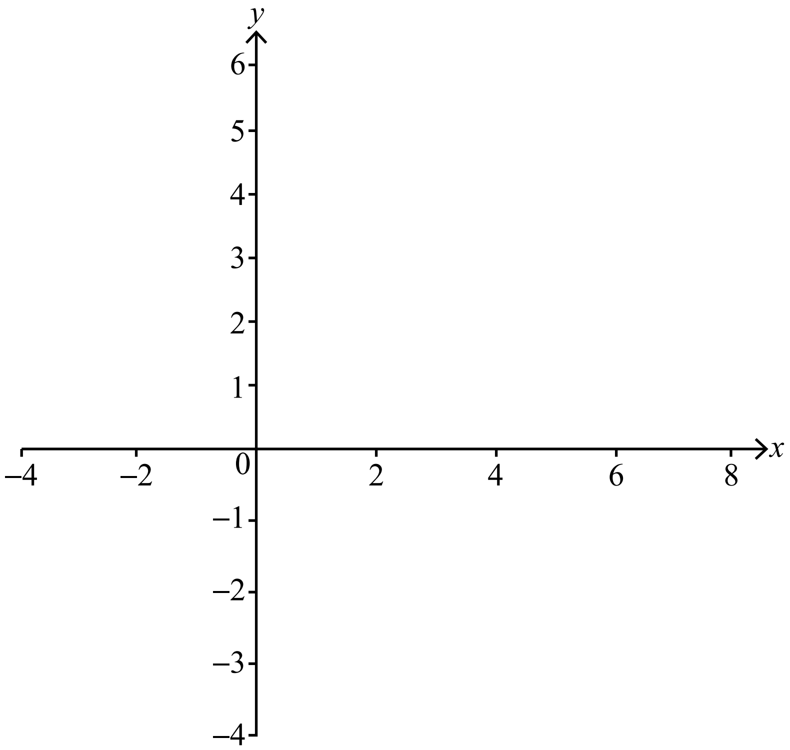
Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

El ángulo agudo que forman los vectores $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ y $5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ se denomina θ.
Halle $\cos\theta$.

2. [Puntuación máxima: 7]

(a) Dibuje aproximadamente los gráficos de $y = \frac{x}{2} + 1$ y de $y = |x - 2|$ en los siguientes ejes de coordenadas. [3]



(b) Resuelva la ecuación $\frac{x}{2} + 1 = |x - 2|$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 6]

La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad, donde p es una constante.

x	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	p	$0{,}5-p$	$0{,}25$	$0{,}125$	p^3

(a) Halle el valor de p. [2]

(b) (i) Halle μ, el valor esperado de X.

(ii) Halle $\mathrm{P}(X>\mu)$. [4]

4. [Puntuación máxima: 6]

Considere la curva $y = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{4}{x-4}$.

Halle las coordenadas x de los puntos de la curva donde la pendiente es cero.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. [Puntuación máxima: 7]

La progresión geométrica $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tiene razón común r.
Considere la progresión $A = \{a_n = \log_2 |u_n| : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

(a) Muestre que A es una progresión aritmética, e indique cuál es la diferencia común, d, en función de r. [4]

En una progresión geométrica en particular, $u_1 = 3$ y la suma de los infinitos términos es igual a 4.

(b) Halle el valor de d. [3]

6. [Puntuación máxima: 7]

Considere las funciones f, g, definidas para $x \in \mathbb{R}$, mediante $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x$.

(a) Halle

(i) $f'(x)$;

(ii) $g'(x)$. [3]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 6]

Considere los números complejos distintos $z = a + \mathrm{i}b$, $w = c + \mathrm{i}d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Halle la parte real de $\dfrac{z+w}{z-w}$. [4]

(b) Halle el valor de la parte real de $\dfrac{z+w}{z-w}$ cuando $|z| = |w|$. [2]

8. [Puntuación máxima: 7]

(a) Utilice la sustitución $u = x^{\frac{1}{2}}$ para hallar $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$. [4]

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de $\frac{1}{2}\int_{1}^{9} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$, en la forma $\arctan q$, donde $q \in \mathbb{Q}$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 24]

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ los vectores de posición con respecto al origen de coordenadas O de los puntos A, B, C y D, respectivamente.
Se sabe que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

(a) (i) Explique por qué ABCD es un paralelogramo.

(ii) Utilizando el álgebra de vectores, muestre que $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. [4]

Los vectores de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ vienen dados por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{b} &= 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{c} &= q\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{d} &= -\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

donde p, q y r son constantes.

(b) Muestre que $p = 1$, $q = 1$ y $r = 4$. [5]

(c) Halle el área del paralelogramo ABCD. [4]

El punto en el que se cortan las diagonales de ABCD se denomina M.

(d) Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por M y es normal al plano Π que contiene a ABCD. [4]

(e) Halle la ecuación cartesiana de Π. [3]

El plano Π corta a los ejes x, y y z en X, Y y Z, respectivamente.

(f) (i) Halle las coordenadas de X, Y y Z.

(ii) Halle YZ. [4]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 14]

La función f se define mediante $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

(a) Halle la función inversa f^{-1} e indique su dominio. [5]

La función g se define mediante $g(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$.

(b) (i) Exprese $g(x)$ en la forma $A + \dfrac{B}{x - 2}$, donde A y B son constantes.

(ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$. Indique la ecuación de cada una de las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes. [5]

La función h se define mediante $h(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$.

(c) Indique el dominio y el recorrido de $h \circ g$. [4]

11. [Puntuación máxima: 12]

(a) Muestre que $\log_{r^2} x = \dfrac{1}{2} \log_r x$, donde $r, x \in \mathbb{R}^+$. [2]

Se sabe que $\log_2 y + \log_4 x + \log_4 2x = 0$.

(b) Exprese y en función de x. Dé la respuesta en la forma $y = px^q$, donde p, q son constantes. [5]

La región R está delimitada por el gráfico de la función hallada en el apartado (b), por el eje x y por las rectas $x = 1$ y $x = \alpha$, donde $\alpha > 1$. El área de R es igual a $\sqrt{2}$.

(c) Halle el valor de α. [5]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.