Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – ensembles, relations et groupes

Lundi 8 mai 2017 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

2217 – 7223

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 10]

L'ensemble A contient tous les entiers positifs inférieurs à 20 qui sont congrus à 3 modulo 4.
L'ensemble B contient tous les nombres premiers inférieurs à 20.

(a) (i) Écrivez tous les éléments de A et tous les éléments de B.

(ii) Déterminez la différence symétrique, $A \Delta B$, des ensembles A et B. [4]

(b) L'ensemble C est défini par $C = \{7\,;\, 9\,;\, 13\,;\, 19\}$.

(i) Écrivez tous les éléments de $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cup C$.

(ii) À partir de là, en considérant $A \cap (B \cup C)$, vérifiez que dans ce cas, l'opération $\cap$ est distributive sur l'opération $\cup$. [6]

2. [Note maximale : 11]

La relation R est définie de telle sorte que aRb si et seulement si $4^a - 4^b$ est divisible par 7, où $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) (i) Montrez que R est une relation d'équivalence.

(ii) Déterminez les classes d'équivalence de R. [9]

La relation d'équivalence S est définie de telle sorte que cSd si et seulement si $4^c - 4^d$ est divisible par 6, où $c, d \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Déterminez le nombre de classes d'équivalence de S. [2]

3. [Maximum mark: 13]

La fonction $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = \left(2x^3 + y^3, x^3 + 2y^3\right)$.

(a) Montrez que f est une bijection. [12]

(b) À partir de là, écrivez la fonction réciproque $f^{-1}(x, y)$. [1]

4. [Note maximale : 16]

L'opération binaire $*$ est définie par

$$a * b = a + b - 3 \text{ pour } a, b \in \mathbb{Z}.$$

(a) Montrez que $\{\mathbb{Z}, *\}$ est un groupe abélien. [9]

(b) Montrez qu'il n'y a aucun élément d'ordre 2. [2]

(c) Trouvez un sous-groupe propre de $\{\mathbb{Z}, *\}$. [2]

L'opération binaire $\circ$ est définie par

$$a \circ b = a + b + 3 \text{ pour } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Considérez le groupe $\{\mathbb{Z}, \circ\}$ et la bijection $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donnée par $f(a) = a - 6$.

(d) Montrez que les groupes $\{\mathbb{Z}, *\}$ et $\{\mathbb{Z}, \circ\}$ sont isomorphes. [3]