Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 1

Jeudi 4 mai 2017 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

2217 – 7219

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n’a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Trouvez le terme indépendant de x dans le développement binomiale de $\left(2x^2 + \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$.

2. [Note maximale : 6]

La fonction f est définie par $f(x) = 2x^3 + 5$, $-2 \le x \le 2$.

(a) Écrivez l'image de f. [2]

(b) Trouvez une expression pour $f^{-1}(x)$. [2]

(c) Écrivez le domaine et l'image de f^{-1}. [2]

3. [Note maximale : 5]

Les 1^{er}, 4^{e} et 8^{e} termes d’une suite arithmétique de raison d, où $d \neq 0$, sont les trois premiers termes d’une suite géométrique de raison r. Étant donné que le 1^{er} terme des deux suites est 9, trouvez

(a) la valeur de d; [4]

(b) la valeur de r. [1]

4. [Note maximale : 7]

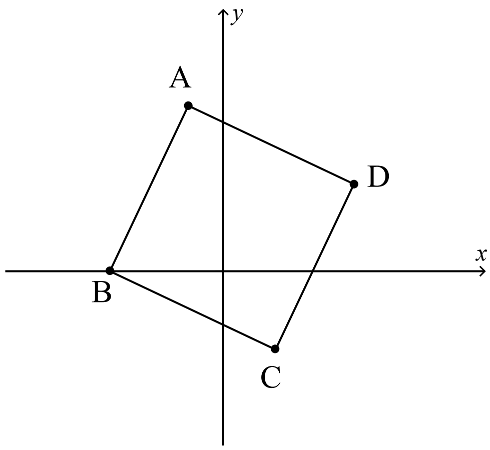
Une particule se déplace en ligne droite. Son déplacement, s mètres à l'instant t secondes est donné par $s = t + \cos 2t$, $t \geq 0$. Les deux premiers instants auxquels la particule est au repos sont notés t_1 et t_2, où $t_1 < t_2$.

(a) Trouvez t_1 et t_2. [5]

(b) Trouvez le déplacement de la particule quand $t = t_1$. [2]

5. [Note maximale : 4]

Dans le diagramme d'Argand suivant, le point A représente le nombre complexe $-1 + 4\mathrm{i}$ et le point B représente le nombre complexe $-3 + 0\mathrm{i}$. La figure ABCD est un carré. Déterminez les nombres complexes représentés par les points C et D.



6. [Note maximale : 7]

(a) En utilisant la substitution $x = \tan\theta$, montrez que $\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta$. [4]

(b) À partir de là, trouvez la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$. [3]

7. [Note maximale : 7]

(a) La variable aléatoire X suit une distribution de Poisson $\mathrm{Po}(m)$. Étant donné que $\mathrm{P}(X > 0) = \frac{3}{4}$, trouvez la valeur de m sous la forme $\ln a$, où a est un entier. [3]

(b) La variable aléatoire Y suit une distribution de Poisson $\mathrm{Po}(2m)$. Trouvez $\mathrm{P}(Y > 1)$ sous la forme $\frac{b - \ln c}{c}$, où b et c sont des entiers. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Note maximale : 9]

Prouvez par récurrence que $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{3}$, où $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

9. [Note maximale : 17]

Considérez la fonction f définie par $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$, où a est une constante positive.

(a) En indiquant toute abscisse à l’origine et ordonnée à l’origine, tout maximum ou minimum et toute asymptote, esquissez les représentations graphiques suivantes sur des axes différents

(i) $y = f(x)$;

(ii) $y = \dfrac{1}{f(x)}$;

(iii) $y = \left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$. [8]

(b) Trouvez $\int f(x)\cos x \,\mathrm{d}x$. [5]

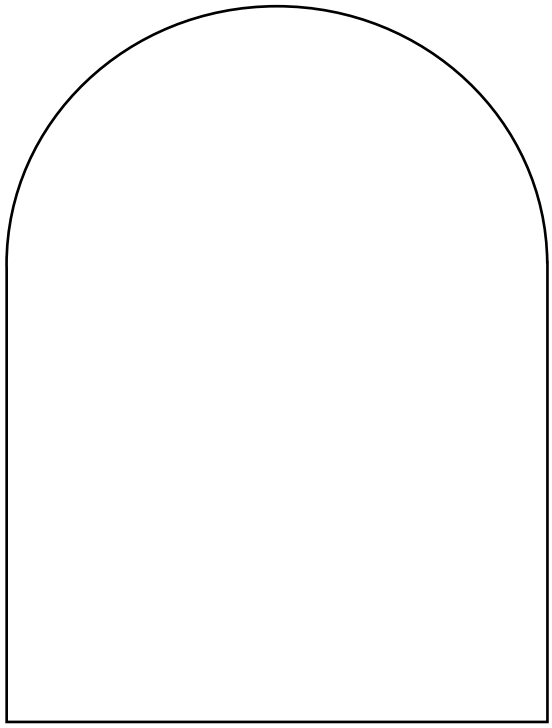
La fonction g est définie par $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ pour $|x| > a$.

(c) En trouvant $g'(x)$, expliquez pourquoi g est une fonction croissante. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

10. [Note maximale : 11]

Une fenêtre est constituée d'un rectangle, surmonté par un demi-cercle de rayon r mètres, tel que montré dans le diagramme. Le périmètre de la fenêtre est une constante, P mètres.



(a) (i) Trouvez l'aire de la fenêtre en fonction de P et r.

(ii) Trouvez la largeur de la fenêtre en fonction de P lorsque l'aire est maximale, en justifiant qu'il s'agit bien d'un maximum. [9]

(b) Montrez que, dans ce cas, la hauteur du rectangle est égale au rayon du demi-cercle. [2]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 22]

(a) Résolvez $2\sin(x+60^\circ)=\cos(x+30^\circ)$, $0^\circ \le x \le 180^\circ$. [5]

(b) Montrez que $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [3]

(c) Soit $z = 1 - \cos 2\theta - \mathrm{i}\sin 2\theta$, $z \in \mathbb{C}$, $0 \le \theta \le \pi$.

(i) Trouvez le module et l’argument de z en fonction de θ. Exprimez chaque réponse sous sa forme la plus simple.

(ii) À partir de là, trouvez les racines cubiques de z sous la forme module-argument. [14]