Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

Miércoles 18 de mayo de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

2216 – 7230

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 12]

Adam hace todos los días el crucigrama que trae el periódico local. El tiempo, X minutos, que tarda Adam en terminar el crucigrama se modeliza mediante la distribución normal $\mathrm{N}(22,\, 5^2)$.

(a) Sabiendo que, un día elegido al azar, la probabilidad de que Adam termine el crucigrama en menos de a minutos es igual a $0{,}8$, halle el valor de a. [3]

(b) Halle la probabilidad de que Adam tarde, en total, más de 120 minutos en terminar cinco crucigramas elegidos al azar. [3]

Beatrice también hace todos los días el crucigrama que trae el periódico local. El tiempo, Y minutos, que tarda Beatrice en terminar el crucigrama se modeliza mediante la distribución normal $\mathrm{N}(40,\, 6^2)$.

(c) Halle la probabilidad de que, un día elegido al azar, Beatrice tarde en terminar el crucigrama más del doble de lo que ha tardado Adam en terminar el crucigrama. Suponga que estos dos tiempos son independientes. [6]

2. [Puntuación máxima: 10]

Las variables aleatorias X, Y siguen una distribución normal bidimensional cuyo coeficiente de correlación momento-producto es igual a ρ.

(a) Indique hipótesis apropiadas para investigar si X, Y son o no independientes. [2]

Se obtuvo una muestra aleatoria compuesta por 10 observaciones de X, Y. A continuación, se calculó el valor del coeficiente de correlación momento-producto de la muestra r, y el resultado fue $0{,}486$.

(b) (i) Determine el valor del parámetro p.

(ii) Indique cuál es su conclusión, a un nivel de significación del 5%. [7]

(c) Explique por qué la ecuación de la recta de regresión de y sobre x no se debería utilizar para predecir el valor de y correspondiente a $x = x_0$, donde x_0 está dentro del intervalo de valores de x que contiene la muestra. [1]

3. [Puntuación máxima: 15]

La variable aleatoria continua X adopta valores que están dentro del intervalo $[0, \theta]$ y

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\theta}{2} \text{ y } \mathrm{Var}(X) = \frac{\theta^2}{24}.$$

Con el fin de estimar el valor del parámetro desconocido θ, se toma de la distribución de X una muestra aleatoria de tamaño n. Denominamos $\bar{X}$ a la media muestral y $U = k\bar{X}$ es un estimador sin sesgo de θ.

(a) Halle el valor de k. [3]

(b) (i) Calcule una estimación sin sesgo de θ, utilizando para ello la muestra aleatoria, $8{,}3 ; 4{,}2 ; 6{,}5 ; 10{,}3 ; 2{,}7 ; 1{,}2 ; 3{,}3 ; 4{,}3$.

(ii) Explique brevemente por qué esto no constituye una buena estimación de θ. [4]

(c) (i) Muestre que $\mathrm{Var}(U) = \frac{\theta^2}{6n}$.

(ii) Muestre que U^2 no es un estimador sin sesgo de θ^2.

(iii) Halle un estimador sin sesgo de θ^2 en función de U y de n. [8]

4. [Puntuación máxima: 11]

Al propietario de una fábrica le piden que fabrique ladrillos de $2{,}2\,\text{kg}$ de peso. El responsable de control de calidad quiere hacer una prueba para saber si, en un día dado, la media de los pesos de los ladrillos que se han fabricado es o no igual a $2{,}2\,\text{kg}$.

(a) Indique hipótesis que le permitan al responsable de control de calidad contrastar la media de los pesos utilizando un contraste de dos colas. [2]

Por ese motivo, este responsable reúne una muestra aleatoria compuesta por 20 de estos ladrillos y determina el peso, x kg, de cada ladrillo. Genera los siguientes valores estadísticos.

$$\sum x = 42{,}0;\ \sum x^2 = 89{,}2$$

(b) (i) Calcule estimaciones sin sesgo de la media y de la varianza de los pesos de los ladrillos que se están fabricando.

(ii) Suponiendo que los pesos de los ladrillos siguen una distribución normal, determine el valor del parámetro p correspondiente a los resultados anteriores e indique cuál es su conclusión en este contexto, utilizando un nivel de significación del 5%. [7]

(c) El propietario está más acostumbrado a utilizar intervalos de confianza. Determine un intervalo de confianza del 95% para la media de los pesos de los ladrillos que se han fabricado durante ese día concreto. [2]

5. [Puntuación máxima: 12]

La variable aleatoria continua X tiene la siguiente función densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

La variable aleatoria discreta Y se define como la parte entera de X, es decir, el mayor número entero que es menor o igual que X.

(a) Muestre que la distribución de probabilidad de Y viene dada por $\mathrm{P}(Y = y) = \mathrm{e}^{-y}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right),\ y \in \mathbb{N}$. [4]

(b) (i) Muestre que $G(t)$, la función generatriz de probabilidad de Y, viene dada por $G(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{1 - \mathrm{e}^{-1}t}$.

(ii) A partir de lo anterior, determine el valor de $E(Y)$, con una aproximación de tres cifras significativas. [8]