22147227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Jueves 15 de mayo de 2014 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 10]*

El grafo ponderado K, que representa los gastos de desplazamiento al ir a visitar a cinco clientes, tiene la siguiente tabla de adyacencia.

	A	B	C	D	E
A	0	1	6	7	4
B	1	0	9	8	10
C	6	9	0	11	3
D	7	8	11	0	12
E	4	10	3	12	0

(a) Dibuje el grafo K. *[2]*

(b) Empezando por el cliente D, utilice el algoritmo del vecino más próximo para determinar un límite superior para el problema del "viajante" en K. *[4]*

(c) Elimine el cliente A y utilice el método de vértice borrado para determinar un límite inferior para el problema del "viajante" en K. *[4]*

2. *[Puntuación máxima: 23]*

(a) Considere los números enteros $a = 871$ y $b = 1157$, dados en base 10.

(i) Exprese a y b en base 13.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\text{mcd}(a, b) = 13$. *[7]*

(b) Una lista L contiene $n+1$ números enteros positivos distintos. Demuestre que al menos dos miembros de L dan el mismo resto cuando se dividen entre n. *[4]*

(c) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x + y + 5z &= a \\ 2x + z &= b \\ 3x + 2y + 4z &= c \end{aligned}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

(i) Muestre que 7 divide a $2a + b - c$.

(ii) Sabiendo que $a = 3$, $b = 0$ y $c = -1$, halle la solución del sistema de ecuaciones módulo 2. *[6]*

(d) Considere el conjunto P de los números de la forma $n^2 - n + 41$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Demuestre que todos los elementos de P son impares.

(ii) Enumere los seis primeros elementos de P para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(iii) Muestre que no todos los elementos de P son primos. *[6]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

(a) Dibuje un árbol generador para

(i) el grafo completo, K_4;

(ii) el grafo bipartito completo, $K_{4,4}$. *[2]*

(b) Demuestre que un grafo conexo simple que tiene n vértices, donde $n > 1$, tiene que tener dos vértices del mismo grado. *[3]*

(c) Demuestre que todo grafo conexo simple tiene al menos un árbol generador. *[5]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) (i) Escriba la solución general de la relación de recurrencia $u_n + 2u_{n-1} = 0$, $n \geq 1$.

(ii) Halle una solución particular de la relación de recurrencia $u_n + 2u_{n-1} = 3n - 2$, $n \geq 1$, de la forma $u_n = An + B$, donde $A, B \in \mathbb{Z}$.

(iii) A partir de lo anterior, halle la solución de $u_n + 2u_{n-1} = 3n - 2$, $n \geq 1$, donde $u_1 = 7$. *[10]*

(b) Halle la solución de la relación de recurrencia $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$, $n \geq 2$, donde $u_0 = 2$ y $u_1 = 2$. Exprese dicha solución de la forma $2^{f(n)} \cos\left(g(n)\pi\right)$, donde las funciones f y g son aplicaciones $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. *[7]*