22147222

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

**MATHÉMATIQUES**
**NIVEAU SUPÉRIEUR**
**ÉPREUVE 3 – ANALYSE**

Jeudi 15 mai 2014 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

*Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.*

**1.** *[Note maximale : 16]*

Considérez les fonctions $f$ et $g$ données par $f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

(a) Montrez que $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$. *[2]*

(b) Trouvez les trois premiers termes non nuls dans le développement en série de Maclaurin de $f(x)$. *[5]*

(c) À partir de là, trouvez la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - f(x)}{x^{2}}$. *[3]*

(d) Trouvez la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{g(x)}{\left[f(x)\right]^{2}}\, dx$. *[6]*

**2.** *[Note maximale : 17]*

(a) Considérez les fonctions $f(x) = (\ln x)^2$, $x > 1$ et $g(x) = \ln\left(f(x)\right)$, $x > 1$.

(i) Trouvez $f'(x)$.

(ii) Trouvez $g'(x)$.

(iii) À partir de là, montrez que $g(x)$ est croissante sur $\left]1, \infty\right[$. *[5]*

(b) Considérez l'équation différentielle

$$(\ln x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y = \frac{2x-1}{(\ln x)}, \ x > 1.$$

(i) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle sous la forme $y = h(x)$.

(ii) Montrez que la solution particulière passant par le point de coordonnées $\left(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right)$ est donnée par $y = \dfrac{x^2 - x + \mathrm{e}}{(\ln x)^2}$.

(iii) Esquissez la représentation graphique de votre solution pour $x > 1$, en indiquant clairement toute asymptote et tout maximum ou minimum. *[12]*

**3.** *[Note maximale : 12]*

Chaque terme de la série entière $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{4\times 5}x + \dfrac{1}{7\times 8}x^2 + \dfrac{1}{10\times 11}x^3 + \ldots$ a la forme $\dfrac{1}{b(n)\times c(n)}x^n$, où $b(n)$ et $c(n)$ sont des fonctions linéaires de $n$.

(a) Trouvez les fonctions $b(n)$ et $c(n)$. *[2]*

(b) Trouvez le rayon de convergence. *[4]*

(c) Trouvez l'intervalle de convergence. *[6]*

**4.** *[Note maximale : 15]*

La fonction $f$ est définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}\left(-x^3 + 2x^2 + x\right), & x \le 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$, où $a$ et $b$ sont des constantes.

(a) Trouvez les valeurs exactes de $a$ et $b$ si $f$ est continue et dérivable en $x = 1$. *[8]*

(b) (i) Utilisez le théorème de Rolle, appliqué à $f$, pour prouver que $2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = 0$ possède une racine à l'intérieur de l'intervalle $\left]-1, 1\right[$.

(ii) À partir de là, prouvez que $2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = 0$ possède au moins deux racines à l'intérieur de l'intervalle $\left]-1, 1\right[$. *[7]*