22147219

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Numéro de session du candidat

Mardi 13 mai 2014 (après-midi)

2 heures

Code de l'examen

2	2	1	4	–	7	2	1	9

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du *Livret de formules pour les cours de* ***mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[120 points]*.

15 pages

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

*Répondez à **toutes** les questions dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 6]*

Les événements A et B sont tels que $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{11}{20}$ et $\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{11}$.

(a) Trouvez $\mathrm{P}(A\cap B)$. *[2]*

(b) Trouvez $\mathrm{P}(A\cup B)$. *[2]*

(c) Indiquez, en donnant une raison, si les événements A et B sont indépendants ou pas. *[2]*

2. *[Note maximale : 5]*

Résolvez l'équation $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprimez votre réponse en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

3. *[Note maximale : 5]*

(a) Montrez que le système d'équations suivant a un nombre infini de solutions. *[2]*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -2 \\ 3x - y + 14z &= 6 \\ x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

Le système d'équations représente trois plans dans l'espace.

(b) Trouvez les équations paramétriques de la droite d'intersection des trois plans. *[3]*

4. *[Note maximale : 6]*

Les racines de l'équation du second degré $2x^2 + 4x - 1 = 0$ sont α et β.

Sans résoudre l'équation,

(a) trouvez la valeur de $\alpha^2 + \beta^2$; *[4]*

(b) trouvez une équation du second degré dont les racines sont α^2 et β^2. *[2]*

5. *[Note maximale : 5]*

(a) Esquissez la représentation graphique de $y = \left|\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right|$ pour $0 \le x \le 8\pi$. *[2]*

(b) Résolvez $\left|\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$ pour $0 \le x \le 8\pi$. *[3]*

6. *[Note maximale : 6]*

PQRS est un losange. Étant donné que $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boldsymbol{a}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \boldsymbol{b}$,

(a) exprimez les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ en fonction de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$; *[2]*

(b) à partir de là, montrez que les diagonales d'un losange se coupent à angle droit. *[4]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. *[Note maximale : 7]*

Considérez les nombres complexes $u = 2 + 3\mathrm{i}$ et $v = 3 + 2\mathrm{i}$.

(a) Étant donné que $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{10}{w}$, exprimez w sous la forme $a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. *[4]*

(b) Trouvez w^* et exprimez-le sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. *[3]*

8. *[Note maximale : 6]*

La fonction f est définie par

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x, & x\leq 2 \\ \frac{3}{4}(x-2)^2-3, & x>2 \end{cases}$$

(a) Déterminez si f est continue ou pas. *[2]*

La représentation graphique de la fonction g est obtenue en appliquant les transformations suivantes à la représentation graphique de f :

une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy suivie d'une translation par le vecteur $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

(b) Trouvez $g(x)$. *[4]*

9. *[Note maximale : 7]*

Les trois premiers termes d'une suite géométrique sont $\sin x$, $\sin 2x$ et $4\sin x\cos^2 x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Trouvez la raison r. *[1]*

(b) Trouvez l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série géométrique $\sin x + \sin 2x + 4\sin x\cos^2 x + \ldots$ converge. *[3]*

Considérez $x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, $x > 0$.

(c) Montrez que la somme de cette série infinie est $\frac{\sqrt{15}}{2}$. *[3]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Note maximale : 7]*

Utilisez le changement de variables $x = a\sec\theta$ pour montrer que

$$\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3}+\pi-6\right).$$

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 12]*

(a) Des batteries pour téléphone mobile sont fabriquées par deux machines. La machine A fabrique 60% de la production quotidienne et la machine B en fabrique 40%. Des tests ont établi qu'en moyenne, 2% des batteries fabriquées par la machine A sont défectueuses et que 1% des batteries fabriquées par la machine B sont défectueuses.

(i) Dessinez un diagramme en arbre qui montre clairement les probabilités en jeu.

(ii) Une batterie est choisie au hasard. Trouvez la probabilité qu'elle soit défectueuse.

(iii) Une batterie est choisie au hasard et on constate qu'elle est défectueuse. Trouvez la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A. *[6]*

(b) Dans un lot de sept transistors, trois d'entre eux sont défectueux. Trois transistors de ce lot sont choisis au hasard et sans remise. La variable aléatoire discrète X représente le nombre de transistors défectueux choisis.

(i) Trouvez $\mathrm{P}(X = 2)$.

(ii) **Recopiez** et complétez le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$				

(iii) Déterminez $\mathrm{E}(X)$. *[6]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

12. *[Note maximale : 18]*

Soit les points $A(1\,;0\,;4)$, $B(2\,;3\,;-1)$ et $C(0\,;1\,;-2)$,

(a) trouvez l'équation vectorielle de la droite L_1 qui passe par les points A et B. *[2]*

La droite L_2 a pour équation cartésienne $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

(b) Montrez que L_1 et L_2 sont des droites gauches (c'est-à-dire non coplanaires). *[5]*

Considérez le plan Π_1, parallèle aux droites L_1 et L_2. Le point C se trouve sur le plan Π_1.

(c) Trouvez l'équation cartésienne du plan Π_1. *[4]*

L'équation vectorielle de la droite L_3 est $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne du plan Π_2 est $x + y = 12$.

L'angle entre la droite L_3 et le plan Π_2 est 60°.

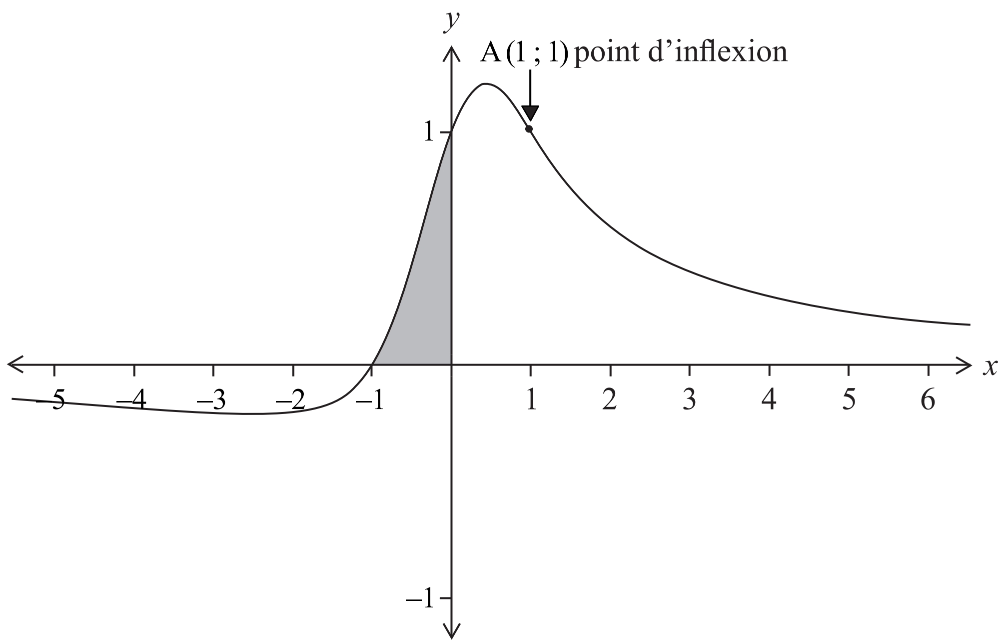
(d) (i) Trouvez la valeur de k.

(ii) Trouvez le point d'intersection P entre la droite L_3 et le plan Π_2. *[7]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

13. *[Note maximale : 16]*

La représentation graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est présentée ci-dessous.



(a) Trouvez $f'(x)$. *[2]*

(b) À partir de là, trouvez les abscisses des points où la pente de la représentation graphique est nulle. *[1]*

(c) Trouvez $f''(x)$ en exprimant votre réponse sous la forme $\dfrac{p(x)}{(x^2+1)^3}$, où $p(x)$ est un polynôme du troisième degré. *[3]*

Le point $(1\,;1)$ est un point d'inflexion. Il y a deux autres points d'inflexion.

(d) Trouvez les abscisses des deux autres points d'inflexion. *[4]*

(e) Trouvez l'aire de la région grisée. Exprimez votre réponse sous la forme $\dfrac{\pi}{a} - \ln\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers. *[6]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

14. *[Note maximale : 14]*

Considérez les fonctions suivantes :

$$h(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

(a) Esquissez la représentation graphique de $y = h(x)$. *[2]*

(b) Trouvez une expression pour la fonction composée $h \circ g(x)$ et indiquez son domaine. *[2]*

Étant donné que $f(x) = h(x) + h \circ g(x)$,

(c) (i) trouvez $f'(x)$ sous sa forme simplifiée ;

(ii) montrez que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$. *[7]*

Nigel déclare que f est une fonction impaire et Tom soutient que f est une fonction paire.

(d) (i) Indiquez qui a raison et justifiez votre réponse.

(ii) À partir de là, trouvez la valeur de $f(x)$ pour $x < 0$. *[3]*

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.