



88137230



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Martes 19 de noviembre de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [60 puntos].

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 8]

Un radar de tráfico registra la velocidad, v kilómetros por hora (km h^{-1}), a la que circulan los coches en un tramo dado de una carretera. La siguiente tabla muestra un resumen de los resultados de un día dado, cuando se registró la velocidad de una muestra aleatoria de 1000 coches.

Velocidad	Número de coches
$50 \leq v < 60$	5
$60 \leq v < 70$	13
$70 \leq v < 80$	52
$80 \leq v < 90$	68
$90 \leq v < 100$	98
$100 \leq v < 110$	105
$110 \leq v < 120$	289
$120 \leq v < 130$	142
$130 \leq v < 140$	197
$140 \leq v < 150$	31

- (a) Utilizando los datos de la tabla,
 - (i) compruebe que una estimación de la velocidad media de la muestra es $113,21 \text{ km h}^{-1}$;
 - (ii) halle una estimación de la varianza de la velocidad a la que circulan los coches en este tramo de carretera. [4]
- (b) Halle I , el intervalo de confianza del 95% para la velocidad media. [2]
- (c) Sea J el intervalo de confianza del 90% para la velocidad media.

Sin calcular J , explique por qué $J \subset I$. [2]

2. [Puntuación máxima: 14]

Un agricultor vende manzanas y naranjas. Los pesos X e Y , en gramos, de las manzanas y las naranjas, respectivamente, siguen una distribución normal de modo que $X \sim N(180, 14^2)$ e $Y \sim N(150, 12^2)$.

- (a) Halle la probabilidad de que el peso de una manzana escogida al azar sea más de 1,5 veces mayor que el peso de una naranja escogida al azar. [7]
- (b) Katharina compra 4 manzanas y 6 naranjas. Halle la probabilidad de que el peso total sea mayor que 1,5 kilogramos. [7]

3. [Puntuación máxima: 14]

Jenny lanza simultáneamente siete monedas y cuenta el número de cruces que saca. Repite el experimento 750 veces. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla de frecuencias.

Número de cruces	Frecuencia
0	6
1	19
2	141
3	218
4	203
5	117
6	38
7	8

- (a) Se afirma que las siete monedas están equilibradas, y se decide poner a prueba esta afirmación utilizando un contraste de χ^2 apropiado.
 - (i) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.
 - (ii) Indique una regla que le permita tomar una decisión, a un nivel de significación del 5%.
 - (iii) Halle el valor del estadístico del contraste.
 - (iv) Escriba la conclusión a la que ha llegado. [10]
- (b) Explique qué se puede hacer con estos datos para reducir la probabilidad de cometer un error de tipo I. [2]
- (c) (i) Indique el significado de un error de tipo II.
- (ii) Escriba qué hay que hacer, si se necesita reducir la probabilidad de cometer tanto un error de tipo I como un error de tipo II. [2]

4. [Puntuación máxima: 10]

Francisco y sus amigos quieren comprobar si los resultados en una carrera de 400 metros mejoran al seguir un determinado programa de entrenamiento. Los participantes realizan una prueba antes y después de someterse al programa de entrenamiento.

La siguiente tabla muestra el tiempo, en segundos, que tarda cada participante en correr 400 metros, tanto antes como después del programa de entrenamiento.

Participante	A	B	C	D	E
Tiempo antes del entrenamiento	75	74	60	69	69
Tiempo después del entrenamiento	73	69	55	72	65

Aplique un contraste adecuado, a un nivel de significación del 1%, para decidir si el programa de entrenamiento mejora el tiempo de los participantes, indicando claramente la hipótesis nula y la alternativa. (Se puede dar por supuesto que los tiempos antes y después del entrenamiento siguen una distribución normal.)

5. [Puntuación máxima: 14]

Sean X e Y variables aleatorias independientes, de modo que $X \sim P_o(3)$ e $Y \sim P_o(2)$.

Sea $S = 2X + 3Y$.

- (a) Halle la media y la varianza de S . [2]
- (b) A partir de lo anterior, indique si S sigue o no una distribución de Poisson, dando una razón para su respuesta. [2]

Sea $T = X + Y$.

- (c) Halle $P(T = 3)$. [4]
- (d) Compruebe que $P(T = t) = \sum_{r=0}^t P(X = r)P(Y = t - r)$. [2]
- (e) A partir de lo anterior, compruebe que T sigue una distribución de Poisson de media 5. [4]