88137225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Lunes 11 de noviembre de 2013 (tarde)

Código del examen

8	8	1	3	–	7	2	2	5

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

14 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

El polinomio cúbico $3x^3 + px^2 + qx - 2$ tiene un divisor que es $(x + 2)$ y cuando se lo divide entre $(x + 1)$, el resto es igual a 4. Halle el valor de p y el valor de q.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. *[Puntuación máxima: 6]*

La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	a

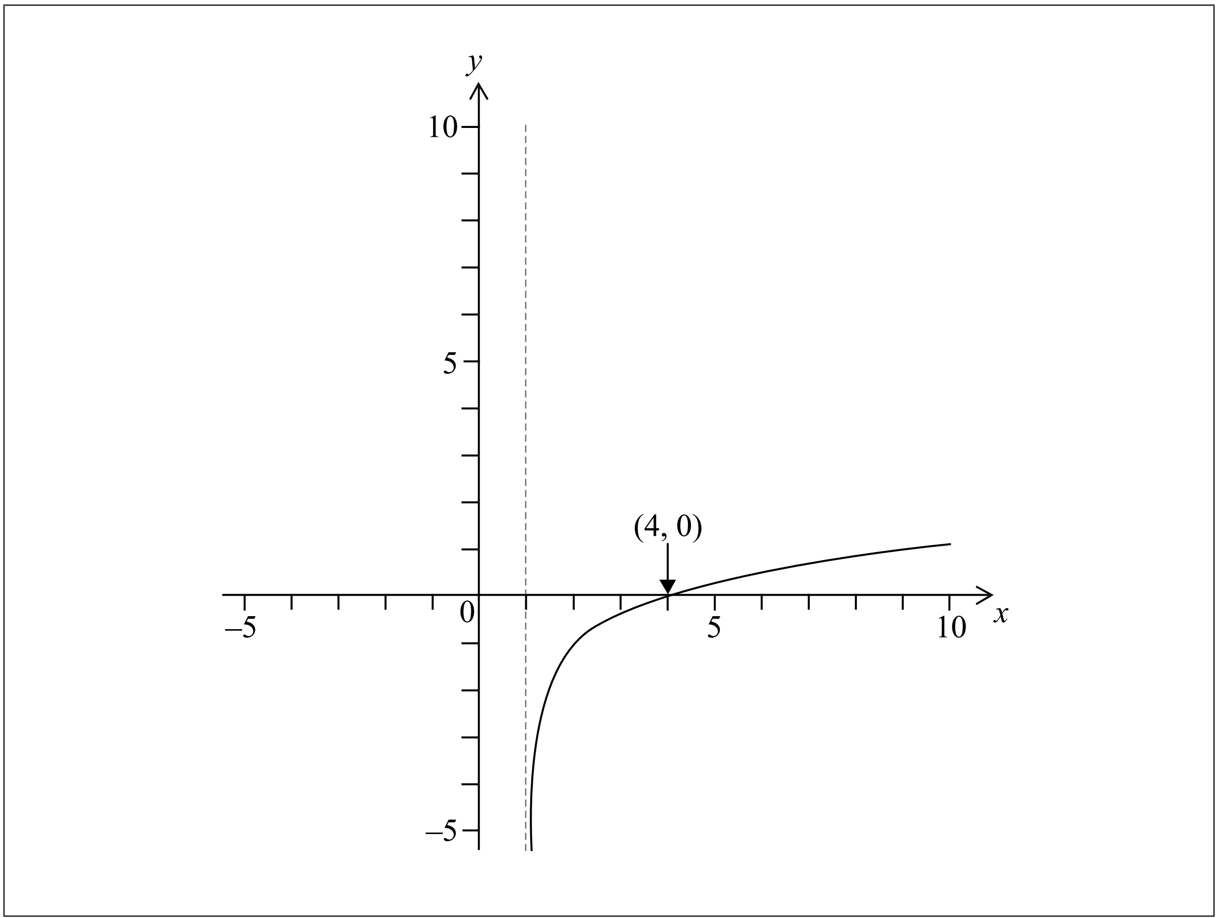
(a) Halle el valor de a. *[1]*

(b) Halle $\mathrm{E}(X)$. *[2]*

(c) Halle $\mathrm{Var}(X)$. *[3]*

3. *[Puntuación máxima: 7]*

La siguiente figura muestra un dibujo aproximado de la gráfica de $y = f(x)$.



(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ sobre los mismos ejes de coordenadas. *[2]*

(b) Indique el recorrido de f^{-1}. *[1]*

(c) Sabiendo que $f(x) = \ln(ax + b)$, $x > 1$, halle el valor de a y el valor de b. *[4]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

4. *[Puntuación máxima: 5]*

Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a(a+1) \\ 1 & b(b+1) \end{pmatrix}$, $a \neq b$. Sabiendo que $\boldsymbol{A}$ es singular, halle el valor de $a+b$.

5. *[Puntuación máxima: 7]*

Una curva tiene por ecuación $x^3y^2 + x^3 - y^3 + 9y = 0$. Halle las coordenadas de los tres puntos de la curva donde $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Demuestre mediante inducción matemática que $n^3 + 11n$ es divisible entre 3 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

7. *[Puntuación máxima: 7]*

La suma de los dos primeros términos de una serie geométrica es igual a 10, mientras que la suma de los cuatro primeros términos es igual a 30.

(a) Compruebe que la razón común r satisface $r^2 = 2$. *[4]*

(b) Sabiendo que $r = \sqrt{2}$,

(i) halle el primer término;

(ii) halle la suma de los diez primeros términos. *[3]*

8. *[Puntuación máxima: 8]*

(a) Demuestre la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 y$. *[4]*

(b) Dada la función $f(x)=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in[0,\pi]$, halle el recorrido de f. *[2]*

(c) Dada la función $g(x)=\operatorname{cosec}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{cosec}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in[0,\pi]$, $x\neq\frac{\pi}{6}$, $x\neq\frac{5\pi}{6}$, halle el recorrido de g. *[2]*

9. *[Puntuación máxima: 8]*

Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\log_2(x-2) = \log_4\left(x^2-6x+12\right)$; *[3]*

(b) $x^{\ln x} = \mathrm{e}^{(\ln x)^3}$. *[5]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

10. *[Puntuación máxima: 20]*

La función f viene dada por $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ $(x \geq 0)$.

(a) (i) Halle una expresión para $f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, determine las coordenadas de A, el punto donde $f'(x) = 0$. *[3]*

(b) Halle una expresión para $f''(x)$ y, a partir de lo anterior, compruebe que el punto A es un máximo. *[3]*

(c) Halle las coordenadas de B, el punto de inflexión. *[2]*

(d) La gráfica de la función g se obtiene a partir de la gráfica de f mediante un estiramiento de razón 2 en la dirección del eje x.

(i) Escriba una expresión para $g(x)$.

(ii) Indique las coordenadas de C, el máximo de g.

(iii) Determine las coordenadas x de D y E, los dos puntos donde $f(x) = g(x)$. *[5]*

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$ y la de $y = g(x)$ sobre los mismos ejes de coordenadas, mostrando claramente los puntos A, B, C, D y E. *[4]*

(f) Halle un valor exacto para el área de la región delimitada por la curva $y = g(x)$, el eje x y la recta $x = 1$. *[3]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

11. *[Puntuación máxima: 20]*

Considere los puntos $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 2, 2)$ y $\mathrm{C}(0, 2, 1)$.

(a) Halle el vector $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}$. *[4]*

(b) Halle un valor exacto para el área del triángulo ABC. *[3]*

(c) Compruebe que la ecuación cartesiana de Π_1, el plano que contiene al triángulo ABC, es $2x + 3y - 4z = 2$. *[3]*

Un segundo plano Π_2 viene definido por la ecuación cartesiana $\Pi_2 : 4x - y - z = 4$. L_1 es la recta de intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Halle una ecuación vectorial de L_1. *[5]*

Un tercer plano Π_3 viene definido por la ecuación cartesiana $16x + \alpha y - 3z = \beta$.

(e) Halle el valor de α para el cual los tres planos contienen a la recta L_1. *[3]*

(f) Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que el plano Π_3 **no** se corte con L_1. *[2]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 20]*

Considere el número complejo $z = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(a) Utilice el teorema de de Moivre para comprobar que $z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[2]*

(b) Desarrolle $\left(z + z^{-1}\right)^4$. *[1]*

(c) A partir de lo anterior, compruebe que $\cos^4\theta = p\cos 4\theta + q\cos 2\theta + r$, donde p, q y r son constantes que hay que determinar. *[4]*

(d) Compruebe que $\cos^6\theta = \frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{5}{16}$. *[3]*

(e) A partir de lo anterior, halle el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta \,\mathrm{d}\theta$. *[3]*

La región S está delimitada por la curva $y = \mathrm{sen}\,x\cos^2 x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

(f) S se rota 2π radianes alrededor del eje x. Halle el valor del volumen así generado. *[4]*

(g) (i) Escriba una expresión para el término constante del desarrollo de $\left(z + z^{-1}\right)^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

(ii) A partir de lo anterior, determine una expresión para $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}\theta \,\mathrm{d}\theta$ en función de k. *[3]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.