22137225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Jueves 9 de mayo de 2013 (tarde)

Código del examen

2	2	1	3	–	7	2	2	5

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

14 páginas

0116

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Halle el valor exacto de $\int_1^2 \left((x-2)^2 + \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \pi x\right) \mathrm{d}x$.

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Considere las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

(a) Halle $\det \boldsymbol{A}$ y, a partir de lo anterior, escriba la matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$. *[2 puntos]*

(b) Halle la matriz $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 4]*

Desarrolle $(2-3x)^5$ en potencias de x ascendentes, simplificando los coeficientes del desarrollo.

4. *[Puntuación máxima: 5]*

Tim y Caz compran una caja que contiene 16 bombones; 10 son de chocolate con leche y 6 son de chocolate negro. Caz coge al azar un bombón y se lo come. A continuación, Tim coge al azar un bombón y se lo come.

(a) Dibuje un diagrama de árbol que represente los posibles resultados. Rotule claramente cada rama con el valor correcto de la probabilidad. *[3 puntos]*

(b) Halle la probabilidad de que Tim y Caz se hayan comido el mismo tipo de bombón. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 7]*

La curva C viene dada por $y = \dfrac{x\cos x}{x + \cos x}$, para $x \geq 0$.

(a) Compruebe que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos^2 x - x^2 \operatorname{sen} x}{(x + \cos x)^2}$, $x \geq 0$. *[4 puntos]*

(b) Halle la ecuación de la recta tangente a C en el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. *[3 puntos]*

6. *[Puntuación máxima: 7]*

En una progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r y la suma de los infinitos términos es igual a 76. En una segunda progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r^3 y la suma de los infinitos términos es igual a 36.

Halle r.

7. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere los números complejos $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$ y $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

(a) Escriba el valor exacto de $|z_1|$ y el de $\arg(z_2)$. *[2 puntos]*

(b) Halle el valor mínimo de $|z_1 + \alpha z_2|$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. *[5 puntos]*

8. *[Puntuación máxima: 6]*

La curva C está definida de manera implícita por la ecuación $\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y$ para $y > 0$.

(a) Exprese $\frac{dy}{dx}$ en función de x y de y. *[4 puntos]*

(b) Halle el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto de C en el cual $y = 1$ y $x > 0$. *[2 puntos]*

9. *[Puntuación máxima: 7]*

La función f viene dada por $f(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 3^{-x}}$, para $x > 0$.

(a) Compruebe que $f(x) > 1$ para todo $x > 0$. *[3 puntos]*

(b) Resuelva la ecuación $f(x) = 4$. *[4 puntos]*

10. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Sabiendo que $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\arctan\left(\frac{1}{p}\right)$, donde $p\in\mathbb{Z}^+$, halle p. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)$. *[3 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 21]*

Los vértices de un triángulo ABC tienen las siguientes coordenadas: $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 1, 1)$ y $C(3, -2, 2)$.

(a) (i) Halle la longitud de los lados del triángulo.

(ii) Halle $\cos B\hat{A}C$. *[6 puntos]*

(b) (i) Compruebe que $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = -7\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{314}$. *[5 puntos]*

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene al triángulo ABC. *[3 puntos]*

(d) Halle una ecuación vectorial de (AB). *[2 puntos]*

El punto D pertenece a (AB), de modo tal que $\overrightarrow{OD}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, donde O es el origen.

(e) (i) Halle las coordenadas de D.

(ii) Compruebe que D no se encuentra entre A y B. *[5 puntos]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 21]*

La función f viene dada por $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, y su dominio es $D=\{x:-1\le x\le 8\}$.

(a) Exprese $f(x)$ de la forma $A+\dfrac{B}{x+2}$, donde A y $B\in\mathbb{Z}$. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, compruebe que $f'(x)>0$ en D. *[2 puntos]*

(c) Indique el recorrido de f. *[2 puntos]*

(d) (i) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(ii) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y=f(x)$, mostrando los puntos de corte con ambos ejes.

(iii) Sobre ese mismo diagrama, dibuje aproximadamente la gráfica de $y=f^{-1}(x)$. *[8 puntos]*

(e) (i) En otro diagrama, dibuje aproximadamente la gráfica de $y=f(|x|)$, donde $x\in D$.

(ii) Halle todas las soluciones de la ecuación $f(|x|)=-\dfrac{1}{4}$. *[7 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 18]*

(a) (i) Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma módulo-argumental: $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ y $z_3 = -2\mathrm{i}$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que los puntos del plano complejo que representan a z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero.

(iii) Compruebe que $z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2z_3^{3n}$, donde $n \in \mathbb{N}$. *[9 puntos]*

(b) (i) Indique las soluciones de la ecuación $z^7 = 1$ para $z \in \mathbb{C}$, dándolas en forma módulo-argumental.

(ii) Si w es la solución de la ecuación $z^7 = 1$ que tiene el menor argumento positivo, determine el argumento de $1 + w$. Exprese la respuesta en función de π.

(iii) Compruebe que $z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1$ es un factor del polinomio $z^7 - 1$. Indique los otros dos factores cuadráticos con coeficientes reales. *[9 puntos]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.