22107230

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Jueves 20 de mayo de 2010 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 12]*

Anna va en bicicleta a su nuevo colegio. Los diez primeros días de colegio, Anna anota cada día el tiempo que tarda en llegar, con los siguientes resultados (en minutos).

12,4 13,7 12,5 13,4 13,8 12,3 14,0 12,8 12,6 13,5

Suponga que estos tiempos constituyen una muestra aleatoria de la distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Determine una estimación sin sesgo de μ y de σ^2. *[2 puntos]*

(b) Calcule un intervalo de confianza del 95 % para μ. *[3 puntos]*

(c) Antes de calcular el intervalo de confianza, Anna creía que el valor de μ sería igual a 12,5. Para comprobar esto, plantea la hipótesis nula $\mathrm{H}_0 : \mu = 12{,}5$.

(i) Utilizando los datos anteriores, calcule el valor del estadístico de contraste apropiado. Halle el valor del parámetro p correspondiente, utilizando un contraste de dos colas.

(ii) Interprete el valor del parámetro p al nivel de significación del 1 %, y justifique su conclusión. *[7 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson, de media μ. Se sabe que el valor de μ es 1 ó 2, por lo que se plantean las siguientes hipótesis.

$$H_0 : \mu = 1;\ H_1 : \mu = 2$$

Se toma de la distribución X una muestra aleatoria $x_1, x_2, ..., x_{10}$ compuesta por 10 observaciones, y se define la siguiente región crítica.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 15$$

Determine la probabilidad de

(a) un error de Tipo I; *[5 puntos]*

(b) un error de Tipo II. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 13]*

Se supone que la variable aleatoria X tiene una función densidad de probabilidad f, donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{18}, & 0 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{demás valores}. \end{cases}$$

(a) Compruebe que si la suposición es correcta, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b^2 - a^2}{36} \text{ para } 0 \leq a \leq b \leq 6.$$ *[3 puntos]*

(b) Se obtiene una muestra aleatoria de X compuesta por 180 valores, y los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Intervalo	[0 , 1[	[1 , 2[	[2 , 3[	[3 , 4[	[4 , 5[	[5 , 6]
Frecuencia	8	18	24	37	44	49

Indique las hipótesis apropiadas y compruebe si es válida dicha suposición, utilizando un contraste de χ^2 al nivel de significación del 5 %. *[10 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 8]*

Una frutería vende manzanas, peras y melocotones. Se puede suponer que los pesos en gramos de estos tres tipos de fruta siguen distribuciones normales, cuyas medias y desviaciones típicas se dan en la siguiente tabla.

Fruta	**Media**	**Desviación Típica**
Manzanas	115	5
Peras	110	4
Melocotones	105	3

Alan compra 1 manzana y 1 pera, mientras que Brian compra 1 melocotón. Calcule la probabilidad de que el peso conjunto de la manzana y la pera de Alan sea superior al doble del peso del melocotón de Brian.

5. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Una bolsa contiene 20 bolas de colores, de las cuales 12 son rojas y 8 son azules. Se toma una muestra aleatoria compuesta por 6 de estas bolas, sin reposición. Calcule la media y la varianza del número de bolas rojas que hay en la muestra. *[7 puntos]*

(b) La variable aleatoria X sigue la distribución binomial negativa $\mathrm{NB}(5,\ p)$, donde $p < 0{,}5$, y $\mathrm{P}(X = 10) = 0{,}05$. Halle el valor de $\mathrm{P}(X = 11)$; para ello, halle primero el valor de p. *[10 marks]*