22107224

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Jeudi 20 mai 2010 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 12]*

Anna va jusqu'à sa nouvelle école à bicyclette. Elle enregistre le temps qu'elle met les dix premiers jours et note les résultats suivants (en minutes).

$$12{,}4 \quad 13{,}7 \quad 12{,}5 \quad 13{,}4 \quad 13{,}8 \quad 12{,}3 \quad 14{,}0 \quad 12{,}8 \quad 12{,}6 \quad 13{,}5$$

On suppose que ces durées constituent un échantillon aléatoire d'une distribution $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Déterminez un estimateur sans biais de μ et σ^2. *[2 points]*

(b) Calculez un intervalle de confiance à 95 % pour μ. *[3 points]*

(c) Avant qu'Anna ait calculé l'intervalle de confiance, elle pensait que la valeur de μ serait 12,5. Pour vérifier ceci, elle pose l'hypothèse nulle $\mathrm{H}_0 : \mu = 12{,}5$.

(i) Utilisez les données ci-dessus pour calculer la valeur d'un test statistique approprié. Trouvez la valeur de p correspondante en utilisant un test bilatéral.

(ii) Interprétez votre valeur de p au seuil de signification de 1 %, en justifiant votre conclusion. *[7 points]*

2. *[Note maximale : 10]*

La variable aléatoire X suit une distribution de Poisson de moyenne μ. On sait que la valeur de μ est soit 1 soit 2, aussi a-t-on posé les hypothèses suivantes.

$$H_0 : \mu = 1;\ H_1 : \mu = 2$$

On prend un échantillon aléatoire $x_1, x_2, ..., x_{10}$ de 10 observations de cette distribution de X et l'on définit la région critique suivante.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 15$$

Déterminez la probabilité

(a) d'une erreur de type I ; *[5 points]*

(b) d'une erreur de type II. *[5 points]*

3. *[Note maximale : 13]*

On suppose que la variable aléatoire X a la fonction de densité f, telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{18}, & 0 \leq x \leq 6 \\ 0\ , & \text{sinon}. \end{cases}$$

(a) Montrez que si cette supposition est correcte, alors

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b^2 - a^2}{36},\ \text{pour } 0 \leq a \leq b \leq 6.$$ *[3 points]*

(b) On a obtenu un échantillon aléatoire de 180 valeurs de X et le tableau suivant a été établi.

Intervalle	[0 , 1[	[1 , 2[	[2 , 3[	[3 , 4[	[4 , 5[	[5 , 6]
Effectifs	8	18	24	37	44	49

En posant les hypothèses appropriées, testez la supposition au seuil de signification de 5 % en utilisant un test du χ^2. *[10 points]*

4. *[Note maximale : 8]*

Un magasin vend des pommes, des poires et des pêches. Les poids, en grammes, de ces trois types de fruit peuvent être considérés comme normalement distribués avec des moyennes et des écarts-types donnés dans le tableau suivant.

Fruit	**Moyenne**	**Écart-type**
Pommes	115	5
Poires	110	4
Pêches	105	3

Alan achète une pomme et une poire tandis que Brian achète une pêche. Calculez la probabilité que le poids total de la pomme et de la poire d'Alan soit plus grand que deux fois le poids de la pêche de Brian.

5. *[Note maximale : 17]*

(a) Un sac contient 20 balles de couleur dont 12 rouges et 8 bleues. Un échantillon aléatoire de 6 de ces balles est pris sans remise. Calculez la moyenne et la variance du nombre de balles rouges dans l'échantillon. *[7 points]*

(b) La variable aléatoire X suit la distribution binomiale négative $\mathrm{NB}(5,\ p)$, avec $p < 0{,}5$, et $\mathrm{P}(X = 10) = 0{,}05$. En trouvant d'abord la valeur de p, trouvez la valeur de $\mathrm{P}(X = 11)$. *[10 points]*