22107228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Jueves 20 de mayo de 2010 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 8]*

Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y^2 = \mathrm{e}^x$, y que $y = 1$ para $x = 0$, utilice el método de Euler, con un paso de $0{,}1$, para hallar un valor aproximado de y para $x = 0{,}4$. Dé todos los valores intermedios con la mayor precisión posible.

2. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Utilizando la integración por partes, compruebe que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x .$$

[5 puntos]

(b) Halle el valor de estas dos integrales. *[6 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 9]*

Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + xy + 4x^2 ,$$

sabiendo que para $x = 1$, $y = 2$. Dé la respuesta de la forma $y = f(x)$.

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Utilizando la serie de Maclaurin para $(1+x)^n$, escriba y simplifique la aproximación obtenida mediante la serie de Maclaurin para $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, hasta el término en x^4. *[3 puntos]*

(b) Utilice este resultado para comprobar que una aproximación en serie para $\arccos x$ es

$$\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 .$$ *[3 puntos]*

(c) Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arccos(x^2) - x^2}{x^6}$. *[5 puntos]*

(d) Utilice la aproximación en serie para $\arccos x$ para hallar un valor aproximado de

$$\int_0^{0,2} \arccos\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x ;$$

dé la respuesta con una aproximación de 5 cifras decimales. ¿Proporciona su respuesta el valor real de la integral con 5 cifras decimales? *[6 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Considere la serie de potencias $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\dfrac{x}{2}\right)^k$.

(i) Halle el radio de convergencia.

(ii) Halle el intervalo de convergencia. *[10 puntos]*

(b) Considere la serie infinita $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \times \dfrac{k}{2k^2+1}$.

(i) Compruebe que la serie es convergente.

(ii) Compruebe que la suma de los infinitos términos de la serie es menor que 0,25. *[5 puntos]*