M10/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/DM

22107227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Jueves 20 de mayo de 2010 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) (i) Una versión del pequeño teorema de Fermat establece que, bajo ciertas condiciones,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Compruebe que esto no se cumple para $a = 4$, $p = 9$ e indique cuál es la condición que no se satisface.

(ii) Sabiendo que $5^{64} \equiv n \pmod{7}$, donde $0 \le n \le 6$, halle el valor de n. *[8 puntos]*

(b) Halle la solución general de las congruencias simultáneas

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$
$$3x \equiv 2 \pmod{5}.$$

[6 puntos]

2. *[Puntuación máxima: 9]*

Un grafo G de vértices A, B, C, D, E tiene la siguiente matriz de adyacencia de costos.

	A	B	C	D	E
A	–	12	10	17	19
B	12	–	13	20	11
C	10	13	–	16	14
D	17	20	16	–	15
E	19	11	14	15	–

(a) (i) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar el árbol generador minimal para G, y dibújelo.

(ii) El grafo H se forma a partir de G, eliminando el vértice D y todas las aristas unidas a D. Dibuje el árbol generador minimal para H, y utilícelo para hallar un límite inferior para el problema del viajante en G. *[7 puntos]*

(b) Compruebe que 80 es un límite superior para este problema del viajante. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

El número entero positivo N se puede expresar en base 9 como $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_9$.

(a) Compruebe que N es divisible por 3 si la cifra menos significativa, a_0, es divisible por 3. *[3 puntos]*

(b) Compruebe que N es divisible por 2 si la suma de sus cifras es par. *[3 puntos]*

(c) Sin convertirlo a base 10, determine si el número $(464860583)_9$ es divisible por 12. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 18]*

(a) Compruebe que, para un grafo planario conexo,

$$v + f - e = 2\,.$$

[7 puntos]

(b) Suponiendo que $v \geq 3$, explique por qué, para un grafo planario conexo simple, $3f \leq 2e$ y, a partir de lo anterior, deduzca que $e \leq 3v - 6$. *[4 puntos]*

(c) El grafo G y su complementario G' son grafos conexos simples, y cada uno de ellos tiene 12 vértices. Compruebe que no es posible que G y G' sean ambos planarios. *[7 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 7]*

Sabiendo que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, compruebe que

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \equiv 0 \pmod 3\,.$$