22107220

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Jeudi 6 mai 2010 (matin)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toute la section A dans les espaces prévus à cet effet.
- Section B : répondez à toute la section B sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Inscrivez votre numéro de session sur chaque livret de réponse que vous avez utilisé et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponse utilisées dans la case prévue à cet effet sur la couverture du livret.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

*Répondez à **toutes** les questions dans les espaces prévus à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 4]*

Soit la suite arithmétique $8, 26, 44, \ldots$.

(a) Trouvez une expression du $n^{\text{ième}}$ terme. *[1 point]*

(b) Donnez la somme des n premiers termes en utilisant la notation sigma. *[1 point]*

(c) Calculez la somme des 15 premiers termes. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Note maximale : 6]*

Une variable aléatoire discrète X a une distribution de probabilité donnée dans le tableau suivant.

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\mathrm{P}(X = x)$	0,15	0,21	p	q	0,13	0,07

(a) Sachant que $\mathrm{E}(X) = 2,61$, déterminez la valeur de p et de q. *[4 points]*

(b) Calculez $\mathrm{Var}(X)$ avec trois chiffres significatifs. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Note maximale : 5]*

Après avoir été traité avec un désherbant, le temps de survie des mauvaises herbes dans un champ est normalement distribué avec une moyenne de 15 jours.

(a) Si la probabilité de survie après 21 jours est 0,2, trouvez l'écart-type pour le temps de survie. *[3 points]*

Quand un autre champ est traité, le temps de survie des mauvaises herbes est normalement distribué avec une moyenne de 18 jours.

(b) Si l'écart-type pour le temps de survie est inchangé, trouvez la probabilité de survie après 21 jours. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Note maximale : 6]*

(a) Trouvez la solution de l'équation

$$\ln 2^{4x-1} = \ln 8^{x+5} + \log_2 16^{1-2x},$$

en exprimant votre solution en fonction de $\ln 2$. *[4 points]*

(b) En utilisant cette valeur de x, trouvez la valeur de a pour laquelle $\log_a x = 2$, en écrivant votre réponse avec trois chiffres après la virgule. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Note maximale : 6]*

On considère le triangle ABC avec $\hat{BAC} = 70^\circ$, $AB = 8\,\text{cm}$ et $AC = 7\,\text{cm}$. Le point D est sur le côté BC tel que $\frac{BD}{DC} = 2$.

Déterminez la longueur de AD.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Note maximale : 6]*

La variable aléatoire X suit une distribution de Poisson avec une moyenne de λ.

(a) Trouvez λ si $\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=0{,}123$. *[4 points]*

(b) Avec cette valeur de λ, trouvez $\mathrm{P}(0<X<9)$. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Note maximale : 6]*

Les trois plans

$$2x - 2y - z = 3$$
$$4x + 5y - 2z = -3$$
$$3x + 4y - 3z = -7$$

se coupent au point de coordonnées (a, b, c).

(a) Trouvez la valeur de a, de b et de c. *[2 points]*

(b) Les équations de trois autres plans sont

$$2x - 4y - 3z = 4$$
$$-x + 3y + 5z = -2$$
$$3x - 5y - z = 6.$$

Trouvez une équation vectorielle de la droite d'intersection de ces trois plans. *[4 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Note maximale : 6]*

(a) Simplifiez la différence des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{3}-\binom{2n}{2}, \text{ avec } n \geq 3 .$$ *[4 points]*

(b) À partir de là, résolvez l'inégalité

$$\binom{n}{3}-\binom{2n}{2} > 32n , \text{ avec } n \geq 3 .$$ *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Note maximale : 7]*

Étant donné que $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, montrez que

(a) $\mathrm{Im}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right) = 0,\ n \in \mathbb{Z}^+$; *[2 points]*

(b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0,\ z \neq -1$. *[5 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

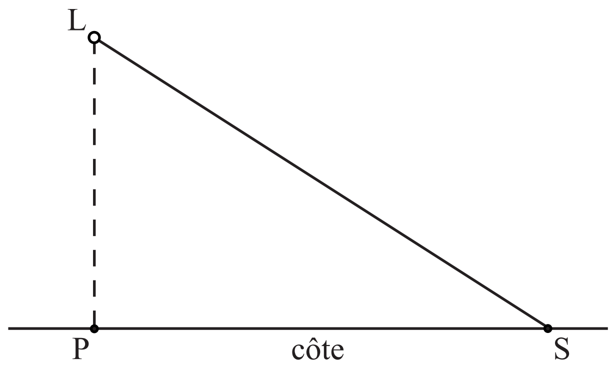
. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Note maximale : 8]*

Un phare L est situé en mer, à 500 mètres du point P le plus proche. P est sur la côte (celle-ci est une ligne droite). Le rayon de lumière étroit issu du phare tourne à la vitesse constante de 8π radians par minute, produisant un spot lumineux S qui se déplace le long de la côte. Vous pouvez supposez que la hauteur du phare est négligeable et que le rayon lumineux se trouve dans le plan horizontal défini par le niveau de la mer.



Lorsque S est à 2 000 mètres de P,

(a) montrez que la vitesse de S est, correcte à trois chiffres significatifs près, 214 000 mètres par minute ; *[5 points]*

(b) trouvez l'accélération de S. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 14]*

La fonction f est définie par

$$f(x) = (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } x \in D,$$

où $D \subseteq \mathbb{R}$ est le plus grand domaine possible pour f.

(a) Trouvez les racines de $f(x) = 0$. *[2 points]*

(b) À partir de là, précisez l'ensemble D. *[2 points]*

(c) Trouvez les coordonnées du maximum relatif de la représentation graphique de $y = f(x)$. *[2 points]*

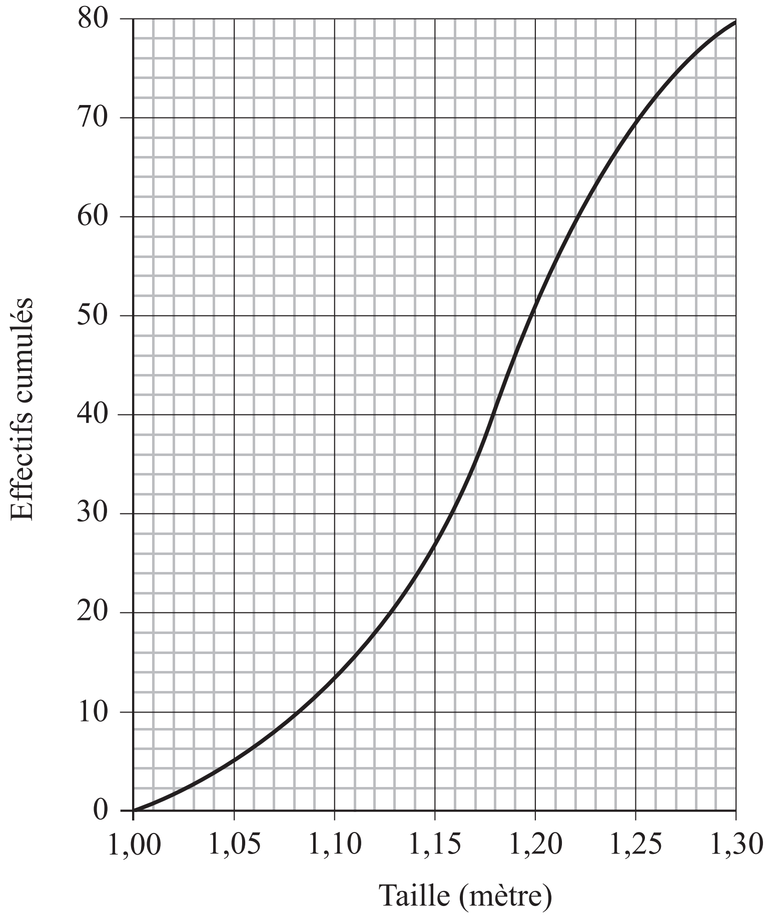
(d) Résolvez l'équation $f(x) = 3$. *[2 points]*

(e) Esquissez la représentation graphique de $|y| = f(x)$, avec $x \in D$. *[3 points]*

(f) Trouvez l'aire de la région complètement limitée par la représentation graphique de $|y| = f(x)$. *[3 points]*

12. *[Note maximale : 13]*

Les tailles (en mètre) d'un échantillon aléatoire de 80 garçons d'une certaine tranche d'âge ont été mesurées et la courbe des effectifs cumulés ci-dessous a été obtenue.



(a) (i) Estimez la médiane de ces données.

(ii) Estimez l'intervalle interquartile de ces données. *[3 points]*

(b) (i) Dressez un tableau statistique pour ces données en utilisant des intervalles de classe de 0,05 mètre.

(ii) Calculez un estimateur sans biais de la moyenne et de la variance des tailles de la population de garçons dans cette tranche d'âge. *[5 points]*

(c) Un garçon est sélectionné au hasard parmi ces 80 garçons.

(i) Trouvez la probabilité que sa taille soit inférieure ou égale à 1,15 mètre.

(ii) Sachant que sa taille est inférieure ou égale à 1,15 mètre, trouvez la probabilité que sa taille soit inférieure ou égale à 1,12 mètre. *[5 points]*

13. *[Note maximale : 12]*

L'intérieur d'un cercle de rayon 2 cm est divisé en une infinité de secteurs. Les aires de ces secteurs constituent un suite géométrique de raison k. L'angle du premier secteur est θ radians.

(a) Montrez que $\theta = 2\pi(1-k)$. *[5 points]*

(b) Le périmètre du troisième secteur est la moitié du périmètre du premier secteur.

Trouvez la valeur de k et de θ. *[7 points]*

14. *[Note maximale : 21]*

Les fonctions f, g et h sont définies par

$$f(x) = 1 + e^x \text{, avec } x \in \mathbb{R},$$
$$g(x) = \frac{1}{x} \text{, avec } x \in \mathbb{R} / \{0\},$$
$$h(x) = \sec x \text{, avec } x \in \mathbb{R} / \left\{\frac{2n+1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(a) Déterminez l'image de la fonction composée $g \circ f$. *[3 points]*

(b) Déterminez la fonction réciproque de la fonction $g \circ f$, en précisant clairement son domaine. *[4 points]*

(c) (i) Montrez que la fonction $y = (f \circ g \circ h)(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)\sin x.$$

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez $\int y \sin x \, dx$, comme une fonction de x.

(iii) On admet que le domaine de $y = (f \circ g \circ h)(x)$ peut être étendu à tout l'axe réel. Une partie de la représentation graphique de $y = (f \circ g \circ h)(x)$, entre son maximum en $x = 0$ et son premier minimum pour x positif est mis en rotation de 2π autour de l'axe des ordonnées. Calculez le volume du solide engendré. *[14 points]*