M10/5/MATHL/HP1/FRE/TZ0/XX

22107219

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Mercredi 5 mai 2010 (après-midi)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toute la section A dans les espaces prévus à cet effet.
- Section B : répondez à toute la section B sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Inscrivez votre numéro de session sur chaque livret de réponse que vous avez utilisé et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponse utilisées dans la case prévue à cet effet sur la couverture du livret.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

Répondez à ***toutes*** *les questions dans les espaces prévus à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 5]*

Une variable aléatoire continue X a une fonction de densité f définie par

$$f(x)=\begin{cases} c(x-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

(a) Déterminez c. *[3 points]*

(b) Trouvez $\mathrm{E}(X)$. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Note maximale : 6]*

(a) Mettez l'expression quadratique $3x^2 - 6x + 5$ sous la forme $a(x+b)^2 + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *[3 points]*

(b) Décrivez une suite de transformations qui transforme la représentation graphique de $y = x^2$ en la représentation graphique de $y = 3x^2 - 6x + 5$. *[3 points]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. *[Note maximale : 5]*

Les trois vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont définis par

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2y \\ -3x \\ 2x \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ 3-x \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ avec } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

(a) Sachant que $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0$, trouvez la valeur de x et de y. *[3 points]*

(b) Trouvez la valeur exacte de $|\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}|$. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Note maximale : 4]*

Une pièce biaisée a été plombée pour que la probabilité d'obtenir face soit $\frac{4}{7}$. La pièce est lancée 6 fois et X représente le nombre de faces obtenues. Trouvez la valeur du rapport $\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Note maximale : 7]*

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouvez $\boldsymbol{BA}$. *[2 points]*

(b) Calculez $\det(\boldsymbol{BA})$. *[2 points]*

(c) Trouvez $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}$. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Note maximale : 6]*

Si x vérifie l'équation $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, montrez que $11\tan x = a + b\sqrt{3}$, avec $a,\ b \in \mathbb{Z}^{+}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. *[Note maximale : 8]*

La fonction f est définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x - 1{,}5}$.

(a) Trouvez $f'(x)$. *[2 points]*

(b) On admet que $y = \dfrac{f(x)}{x-1}$ présente un minimum relatif en $x = a$, $a > 1$. Trouvez la valeur de a. *[6 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Note maximale : 7]*

La normale à la courbe $xe^{-y} + e^{y} = 1 + x$, au point $(c, \ln c)$, a comme ordonnée à l'origine $c^2 + 1$.

Déterminez la valeur de c.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Note maximale : 6]*

Trouvez la valeur de $\int_0^1 t \ln(t+1)\,\mathrm{d}t$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Note maximale : 6]*

Une fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$, $x \neq 1$.

(a) Trouvez une expression de $f^{-1}(x)$. *[3 points]*

(b) Résolvez l'équation $\left| f^{-1}(x) \right| = 1 + f^{-1}(x)$. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 10]*

(a) On considère la suite d'égalités ci-dessous.

$$1\times 2=\frac{1}{3}(1\times 2\times 3),$$
$$1\times 2+2\times 3=\frac{1}{3}(2\times 3\times 4),$$
$$1\times 2+2\times 3+3\times 4=\frac{1}{3}(3\times 4\times 5),$$
$$\ldots .$$

(i) Formulez une conjecture concernant la $n^{\text{ième}}$ égalité dans cette suite.

(ii) Vérifiez votre conjecture pour $n=4$. *[2 points]*

(b) Dans une suite de nombres, le $n^{\text{ième}}$ terme est donné par $u_n=2^n+3$, $n\in\mathbb{Z}^+$. Bill conjecture que tous les termes de la suite sont des nombres premiers. Montrez que la conjecture de Bill est fausse. *[2 points]*

(c) Utilisez une démonstration par récurrence pour démontrer que $5\times 7^n+1$ est divisible par 6 pour tout $n\in\mathbb{Z}^+$. *[6 points]*

12. *[Note maximale : 19]*

(a) Soit les vecteurs $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

(i) Trouvez le cosinus de l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

(ii) Trouvez $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

(iii) **À partir de là**, trouvez l'équation cartésienne du plan Π qui contient les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ et qui passe par le point $(1; 1; -1)$.

(iv) Le plan Π coupe le plan *x*-*y* suivant la droite l. Trouvez l'aire de la région triangulaire finie limitée par l, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. *[11 points]*

(b) Étant donné deux vecteurs $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$,

(i) montrez que $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2$;

(ii) à partir de là ou par toute autre méthode, montrez que

$$|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + 2\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|^2 ;$$

(iii) déduisez-en que $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}| \le |\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}|$. *[8 points]*

13. *[Note maximale : 16]*

Soit $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

(a) Montrez que

(i) $\omega^3 = 1$;

(ii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$. *[5 points]*

(b) (i) Déduisez-en que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)} = 0$.

(ii) Représentez ce résultat pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ sur le plan complexe. *[4 points]*

(c) (i) Développez et simplifiez $F(z) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)$ avec z un nombre complexe.

(ii) Résolvez $F(z) = 7$, en écrivant votre réponse en fonction de ω. *[7 points]*

14. *[Note maximale : 15]*

Dans toute cette question, x vérifie $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Résolvez l'équation différentielle $\sec^2 x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2$, avec $y = 1$ quand $x = 0$.

Écrivez votre réponse sous la forme $y = f(x)$. *[7 points]*

(b) (i) Démontrez que $1 \le \sec x \le 1 + \tan x$.

(ii) Déduisez-en que $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. *[8 points]*