88097230

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Miércoles 18 de noviembre de 2009 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 13]*

Se cree que la media del peso de una cierta raza de aves es de 2,5 kg. Para comprobar si es o no acertada esta suposición, se planea determinar los pesos x_1, x_2, x_3, ..., x_{16} (en kg) de dieciséis de estas aves, y calcular a continuación la media muestral $\bar{x}$. Puede dar por supuesto que estos pesos constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal, cuya desviación típica es de 0,1 kg.

(a) Indique hipótesis apropiadas para un contraste de dos colas. *[2 puntos]*

(b) Halle la región crítica para $\bar{x}$ que presenta un nivel de significación del 5 %. *[6 puntos]*

(c) Sabiendo que la media del peso de las aves de esta especie es, en realidad, de 2,6 kg, halle la probabilidad de cometer un error de tipo II. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) Alan y Brian son atletas especializados en salto de longitud. Cuando Alan realiza un salto, la longitud de dicho salto es una variable aleatoria que sigue una distribución normal, de media 5,2 metros y desviación típica 0,1 metros. Cuando Brian realiza un salto, la longitud de dicho salto es una variable aleatoria que sigue una distribución normal, de media 5,1 metros y desviación típica 0,12 metros. Para ambos atletas, la longitud de un salto determinado es independiente de las longitudes de los demás saltos realizados. Durante una sesión de entrenamiento, Alan realiza cuatro saltos y Brian realiza tres saltos. Calcule la probabilidad de que la media de las longitudes de los cuatro saltos realizados por Alan sea menor que la media de las longitudes de los tres saltos de Brian. *[9 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

(b) Colin entra a formar parte del equipo, y el entrenador quiere saber cuál es la media, μ en metros, de las longitudes de sus saltos. Colin realiza seis saltos y obtiene los siguientes resultados (en metros).

5,21 ; 5,30 ; 5,22 ; 5,19 ; 5,28 ; 5,18

(i) Calcule una estimación sin sesgo tanto de la media μ como de la varianza de las longitudes de sus saltos.

(ii) Suponiendo que las longitudes de estos saltos son independientes entre sí y que siguen una distribución normal, calcule un intervalo de confianza del 90 % para μ. *[10 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

La siguiente tabla muestra los resultados de 100 observaciones independientes de la variable aleatoria discreta X.

Valor de X	3	4	5	6	7	8 o más
Frecuencia	25	21	20	15	12	7

Charles cree que X presenta una distribución binomial negativa de parámetros $r = 3$ y $p = 0,6$ y le pide que realice un contraste de χ^2 para averiguar si su suposición es acertada.

(a) Indique hipótesis apropiadas. *[1 punto]*

(b) Calcule las frecuencias esperadas; dé las respuestas con una aproximación de dos cifras decimales. *[8 puntos]*

(c) Calcule el valor del estadístico χ^2 y determine el valor del parámetro p-correspondiente. *[5 puntos]*

(d) Indique cuál es su conclusión. *[1 punto]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

La variable aleatoria X sigue una distribución $\mathrm{B}(n,\ p)$.

(a) (i) Compruebe que $\dfrac{\mathrm{P}(X=x)}{\mathrm{P}(X=x-1)} = \dfrac{(n-x+1)\,p}{x(1-p)}$.

(ii) Deduzca que si $\mathrm{P}(X=x) > \mathrm{P}(X=x-1)$ entonces $x < (n+1)\,p$.

(iii) A partir de lo anterior, determine el valor de x en que $\mathrm{P}(X=x)$ alcanza su máximo, cuando $(n+1)\,p$ no es un entero. *[9 puntos]*

(b) Sabiendo que $n=19$, halle el conjunto de valores de p para los cuales X tiene una única moda cuyo valor es 13. *[4 puntos]*