88097229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Miércoles 18 de noviembre de 2009 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 13]*

La operación binaria $*$ se define en el conjunto $S = \{0, 1, 2, 3\}$ de la siguiente forma

$$a * b = a + 2b + ab \pmod 4 .$$

(a) (i) Construya la tabla de Cayley.

(ii) Escriba, dando una razón, si esta tabla es o no un cuadrado latino. *[4 puntos]*

(b) (i) Escriba, dando una razón, si $*$ es o no conmutativa.

(ii) Determine si $*$ es o no asociativa, justificando su respuesta. *[5 puntos]*

(c) Halle todas las soluciones de la ecuación $x * 1 = 2 * x$, para $x \in S$. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

La función $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ se define de la siguiente forma $f(x) = 2e^{x} + e^{-x} - 3$.

(a) Halle $f'(x)$. *[1 punto]*

(b) Compruebe que f es una aplicación biyectiva. *[3 puntos]*

(c) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$. *[6 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

Las relaciones R y S se definen sobre polinomios cuadráticos P que son de la forma

$$P(z) = z^2 + az + b \text{, donde } a, b \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

(a) La relación R viene dada por $P_1 R P_2$ si y solo si la suma de los dos ceros de P_1 es igual a la suma de los dos ceros de P_2.

(i) Compruebe que R es una relación de equivalencia.

(ii) Determine la clase de equivalencia a la que pertenece $z^2 - 4z + 5$. *[9 puntos]*

(b) La relación S viene dada por $P_1 S P_2$ si y solo si P_1 y P_2 tienen al menos un cero en común. Determine si S es o no transitiva. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

(a) Compruebe que el conjunto de matrices que son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\text{, donde } a, b \in \mathbb{R}^+$$

conforma un grupo G para la multiplicación de matrices.
(Puede dar por supuesto que la multiplicación de matrices es asociativa.) *[7 puntos]*

(b) Sabiendo que el conjunto de matrices que son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}\text{, donde } a, b \in \mathbb{R}^+$$

conforma un grupo H para la multiplicación de matrices, compruebe que G y H son isomorfos. *[9 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 9]*

Sea $\{G, *\}$ un grupo finito de orden n y sea H un subconjunto no vacío de G.

(a) Compruebe que el orden de cualquier elemento $h \in H$ es menor o igual que n. *[3 puntos]*

(b) Si H es cerrado para $*$, compruebe que $\{H, *\}$ es un subgrupo de $\{G, *\}$. *[6 puntos]*