N09/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SE

88097228

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Miércoles 18 de noviembre de 2009 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

8809-7228

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 13]*

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \text{ (donde } x > 0\text{)}$$

sabiendo que $y = 2$ para $x = 1$. Dé la respuesta en la forma $y = f(x)$.

2. *[Puntuación máxima: 10]*

La función f se define de la siguiente forma $f(x) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x - 1)}$.

(a) Compruebe que la serie de Maclaurin para $f(x)$ es $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \ldots$. Puede dar por conocida la serie de Maclaurin para e^x. *[5 puntos]*

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{f'(x) - 1}$. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 9]*

La sucesión $\{u_n\}$ se define para $n \in \mathbb{Z}^+$ de la siguiente forma: $u_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}$.

(a) Halle el valor L del $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$. *[2 puntos]*

(b) Utilice la definición formal de convergencia (con ε y N) para **demostrar** que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L$. *[7 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

Considere la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

(a) Utilizando alguno de los criterios de convergencia usuales, compruebe que la serie es convergente. *[3 puntos]*

(b) (i) Exprese $\frac{1}{n(n+3)}$ en fracciones simples.

(ii) A partir de lo anterior, halle la suma de los términos de la serie infinita dada. *[10 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Halle el radio de convergencia de la serie infinita

$$\frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 5}x^2 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 5\times 8}x^3 + \frac{1\times 3\times 5\times 7}{2\times 5\times 8\times 11}x^4 + \ldots .$$ *[7 puntos]*

(b) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n} + n\pi\right)$ es convergente o divergente. *[8 puntos]*