88097226

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Viernes 6 de noviembre de 2009 (mañana)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

Halle los valores de k para los cuales la ecuación $x^3 + x^2 - x + 2 = k$ tiene tres soluciones reales distintas entre sí.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 6]*

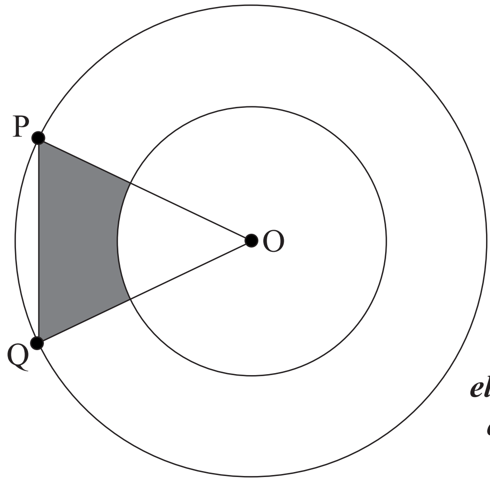
La ecuación vectorial de la recta l viene dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta l y al punto $\text{A}(4, -2, 5)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. *[Puntuación máxima: 7]*

El diagrama que aparece a continuación muestra dos circunferencias concéntricas de centro O y de radios 2 cm y 4 cm. Los puntos P y Q se encuentran sobre la circunferencia de mayor tamaño y $\hat{POQ} = x$, donde $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



el diagrama no está a escala

(a) Compruebe que el área de la región sombreada es igual a $8 \operatorname{sen} x - 2x$. *[3 puntos]*

(b) Halle el valor máximo del área de la región sombreada. *[4 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

Cuando $\left(1+\frac{x}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, se desarrolla en potencias ascendentes de x, el coeficiente correspondiente a x^3 es 70.

(a) Halle el valor de n. *[5 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, halle el coeficiente correspondiente a x^2. *[1 punto]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 8]*

Las pérdidas anuales, relacionadas con factores climáticos, de una empresa de seguros se modelizan mediante una variable aleatoria X, cuya función densidad de probabilidad es

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2,5(200)^{2,5}}{x^{3,5}}, & x \geq 200\\ 0, & \text{resto de valores.}\end{cases}$$

Halle la mediana.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Tim va a un conocido restaurante donde no se puede reservar mesa. Se ha determinado que los tiempos de espera hasta que se consigue una mesa siguen una distribución normal, de media 18 minutos y desviación típica 4 minutos.

(a) Tim dice que se marchará si 25 minutos después de haber llegado al restaurante todavía no ha conseguido mesa. Halle la probabilidad de que Tim se vaya del restaurante sin haber conseguido mesa. *[2 puntos]*

(b) Tim lleva esperando 15 minutos. Halle la probabilidad de que Tim consiga una mesa durante los próximos cinco minutos. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere la ecuación $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Los puntos en el diagrama de Argand que representan las tres raíces de la ecuación son los vértices de un triángulo cuya área es igual a 9. Sabiendo que una de las raíces es $-1+3\mathrm{i}$, halle

(a) las otras dos raíces; *[4 puntos]*

(b) a, b y c. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle la pendiente de la curva $\mathrm{e}^{xy} + \ln(y^2) + \mathrm{e}^{y} = 1 + \mathrm{e}$ en el punto $(0, 1)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere la función g, donde $g(x) = \dfrac{3x}{5+x^2}$.

(a) Sabiendo que el dominio de g es $x \geq a$, halle el menor valor de a para el cual existe la función inversa de g. *[1 punto]*

(b) Dibuje aproximadamente, utilizando los mismos ejes de coordenadas,

(i) la gráfica de g para este valor de a;

(ii) la correspondiente función inversa, g^{-1}. *[4 puntos]*

(c) Halle una expresión para $g^{-1}(x)$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECCIÓN B

Conteste ***todas*** *las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

10. *[Puntuación máxima: 11]*

Considere la función f, definida por $f(x) = x - a\sqrt{x}$, donde $x \geq 0$, $a \in \mathbb{R}^+$.

(a) Halle, en función de a,

(i) los ceros de f;

(ii) los valores de x para los cuales f es decreciente;

(iii) los valores de x para los cuales f es creciente;

(iv) el recorrido de f. *[10 puntos]*

(b) Indique cuál es la concavidad de la gráfica de f. *[1 punto]*

11. *[Puntuación máxima: 19]*

Dos rectas están definidas de la siguiente forma

$$l_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } l_2 : \frac{x-4}{-3} = \frac{y+7}{4} = -(z+3).$$

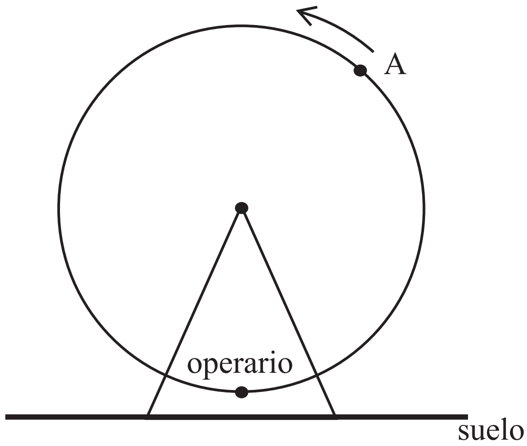
(a) Halle las coordenadas del punto A perteneciente a l_1 y del punto B perteneciente a l_2 tales que $\overrightarrow{\text{AB}}$ sea perpendicular a l_1 y a l_2. *[13 puntos]*

(b) Halle $|\text{AB}|$. *[3 puntos]*

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π que contiene a l_1 y que no se corta con l_2. *[3 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 10]*

A continuación se presenta un diagrama de una noria, un artefacto de la feria de diversiones que transporta pasajeros en la parte externa de una rueda.



(a) La noria circular de 10 metros de radio está girando a una velocidad de 3 radianes por minuto. Determine a qué velocidad se desplaza verticalmente un pasajero de la noria cuando está subiendo y pasa por el punto A, situado 6 metros más alto que el centro de la noria. *[7 puntos]*

(b) El operario de la noria está situado justo debajo del centro, de forma que la parte inferior de la noria está a la altura de sus ojos. Al observar al pasajero, su línea visual forma un ángulo α con la horizontal. Halle la razón de cambio de α en el punto A. *[3 puntos]*

13. *[Puntuación máxima: 20]*

En cada ronda de dos juegos diferentes, Ying lanza al aire tres monedas equilibradas y Mario lanza dos monedas equilibradas.

(a) El primer juego consta de una ronda. Si Ying saca más caras que Mario, ella recibe 5 $ de Mario. Si Mario saca más caras que Ying, él recibe 10 $ de Ying. Si sacan el mismo número de caras, entonces Mario recibe 2 $ de Ying. Determine las ganancias esperadas de Ying. *[12 puntos]*

(b) Ahora juegan al segundo juego, en el que el ganador será aquel jugador que saque el mayor número de caras en una ronda. Si obtienen el mismo número de caras, vuelven a jugar otra ronda hasta que haya un ganador. Calcule la probabilidad de que Ying gane el juego. *[8 puntos]*