88097225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Jueves 5 de noviembre de 2009 (tarde)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

Cuando $3x^5 - ax + b$ se divide por $x - 1$, se obtiene el mismo resto que cuando se divide por $x + 1$. Sabiendo que $a, b \in \mathbb{R}$, halle

(a) el valor de a; *[4 puntos]*

(b) el conjunto de valores para b. *[1 punto]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Halle los valores de n para los cuales $\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^n$ es un número real.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ están definidas de la siguiente forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -9 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Sabiendo que $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, halle a. *[1 punto]*

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle $\boldsymbol{A}^{-1}$. *[2 puntos]*

(c) Halle la matriz $\boldsymbol{X}$, tal que $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere la función f, donde $f(x) = \text{arcsen}(\ln x)$.

(a) Halle el dominio de f. *[3 puntos]*

(b) Halle $f^{-1}(x)$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 5]*

La raíz real de la ecuación $x^3 - x + 4 = 0$, aproximando a tres cifras decimales, es $-1{,}796$.
Determine la raíz real para cada una de las siguientes ecuaciones.

(a) $(x-1)^3 - (x-1) + 4 = 0$ *[2 puntos]*

(b) $8x^3 - 2x + 4 = 0$ *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 5]*

En una escuela de enfermería, el 80 % de los estudiantes que entran son mujeres. Según los datos de la escuela, el 70 % de las mujeres y el 90 % de los varones que empiezan la carrera, se reciben. Se elige al azar a uno de los estudiantes que se han recibido. Halle la probabilidad de que dicho estudiante sea un varón. Dé su respuesta en forma de fracción simplificada.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 9]*

(a) Calcule $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} \mathrm{d}x$. *[6 puntos]*

(b) Halle $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Una población determinada se puede modelizar mediante la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky\cos kt$, donde y representa la población en el instante t horas y k es una constante positiva.

(a) Sabiendo que $y = y_0$ cuando $t = 0$, exprese y en función de k, t e y_0. *[5 puntos]*

(b) Halle la razón entre el tamaño mínimo y el tamaño máximo de la población. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

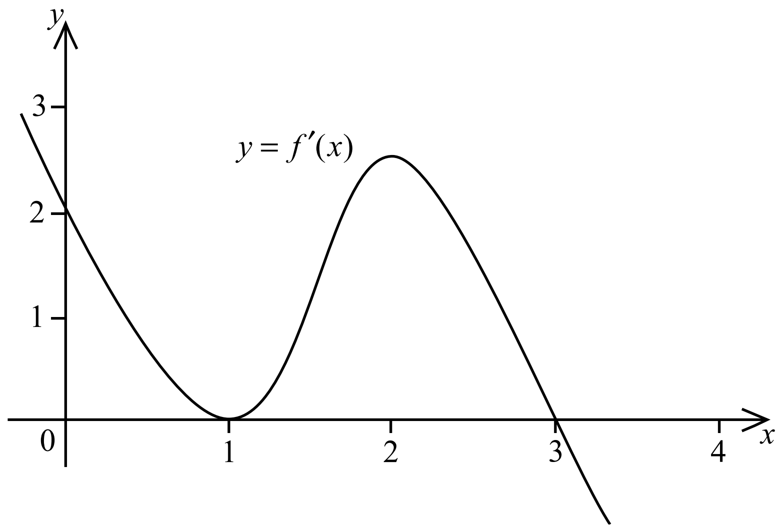
. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 5]*

El diagrama que aparece a continuación muestra un dibujo aproximado $f'(x)$, la función pendiente de la curva $f(x)$.



Dibuje aproximadamente en los siguientes ejes de coordenadas la curva $y = f(x)$ sabiendo que $f(0) = 0$. Indique claramente en dicha gráfica todos los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

10. *[Puntuación máxima: 8]*

La forma de un vaso queda definida por la rotación de la gráfica de $y = \mathrm{e}^x$ alrededor del eje y, para $1 \le y \le 5$. Halle el volumen del vaso.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 21]*

(a) La suma de los seis primeros términos de una serie aritmética es igual a 81. La suma de los once primeros términos es igual a 231. Halle el primer término y la diferencia común. *[6 puntos]*

(b) La suma de los dos primeros términos de una serie geométrica es igual a 1, mientras que la suma de los cuatro primeros términos es igual a 5. Sabiendo que todos sus términos son positivos, halle el primer término y la razón común. *[5 puntos]*

(c) El término *r-ésimo* de una nueva serie se define como el producto del término *r-ésimo* de la serie aritmética y el término *r-ésimo* de la serie geométrica anteriormente mencionadas. Compruebe que el término *r-ésimo* de esta nueva serie es $(r+1)2^{r-1}$. *[3 puntos]*

(d) Utilizando la inducción matemática, demuestre que

$$\sum_{r=1}^{n}(r+1)2^{r-1}=n2^{n}\text{ , } n\in\mathbb{Z}^{+}\text{ .}$$ *[7 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 17]*

Una recta tangente a la gráfica de $y=\ln x$ pasa por el origen de coordenadas.

(a) Dibuje aproximadamente, en los mismos ejes de coordenadas, las gráficas de $y=\ln x$ y de la recta tangente. A partir de lo anterior, halle la ecuación de la recta tangente. *[11 puntos]*

(b) Utilice su gráfica aproximada para explicar por qué $\ln x\le\dfrac{x}{\mathrm{e}}$ para $x>0$. *[1 punto]*

(c) Compruebe que $x^{\mathrm{e}}\le\mathrm{e}^{x}$ para $x>0$. *[3 puntos]*

(d) Determine cuál es mayor: π^{e} o e^{π}. *[2 puntos]*

13. *[Puntuación máxima: 22]*

(a) Sea $z = x + \mathrm{i}y$ cualquier número complejo distinto de cero.

(i) Exprese $\frac{1}{z}$ en la forma $u + \mathrm{i}v$.

(ii) Si $z + \frac{1}{z} = k$, $k \in \mathbb{R}$, compruebe que o bien $y = 0$, o bien $x^2 + y^2 = 1$.

(iii) Compruebe que si $x^2 + y^2 = 1$, entonces $|k| \le 2$. *[8 puntos]*

(b) Sea $w = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(i) Compruebe que $w^n + w^{-n} = 2\cos n\theta$, $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Resuelva la ecuación $3w^2 - w + 2 - w^{-1} + 3w^{-2} = 0$; dé las raíces en la forma $x + \mathrm{i}y$. *[14 puntos]*