88087229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Jueves 13 de noviembre de 2008 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

© International Baccalaureate Organization 2008

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 12]*

A, B, C y D son subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

$$A = \{m \mid m \text{ es un número primo menor de } 15\}$$

$$B = \{m \mid m^4 = 8m\}$$

$$C = \{m \mid (m+1)(m-2) < 0\}$$

$$D = \{m \mid m^2 < 2m+4\}$$

(a) Enumere los elementos pertenecientes a cada uno de estos conjuntos. *[4 puntos]*

(b) Determine, fundamentando su respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

(i) $n(D) = n(B) + n(B \cup C)$

(ii) $D \setminus B \subset A$

(iii) $B \cap A' = \varnothing$

(iv) $n(B \Delta C) = 2$ *[8 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

Una operación binaria se define sobre $\{-1, 0, 1\}$ de la siguiente manera

$$A \odot B = \begin{cases} -1, & \text{si } |A| < |B| \\ 0, & \text{si } |A| = |B| \\ 1, & \text{si } |A| > |B|. \end{cases}$$

(a) Construya la tabla de Cayley para esta operación. *[3 puntos]*

(b) Fundamentando su respuesta, determine si la operación es

(i) cerrada;

(ii) conmutativa;

(iii) asociativa. *[7 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

Dos funciones, F y G, están definidas sobre $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ de la siguiente manera

$$F(x) = \frac{1}{x}, \quad G(x) = 1 - x, \text{ para todo } x \in A.$$

(a) Compruebe que para la operación de composición de funciones, cada función es su propia inversa. *[3 puntos]*

(b) F y G, junto con otras cuatro funciones, forman un conjunto cerrado respecto a la operación de composición de funciones.

Halle estas cuatro funciones. *[7 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

Determine, fundamentando su respuesta, cuáles de los siguientes conjuntos constituyen grupos para las operaciones que se indican a continuación. Donde resulte pertinente, puede suponer que la multiplicación es asociativa.

(a) $\mathbb{Z}$ para la resta. *[2 puntos]*

(b) El conjunto de los números complejos de módulo 1 para la multiplicación. *[4 puntos]*

(c) El conjunto $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ para la multiplicación módulo 10. *[2 puntos]*

(d) El conjunto de los números racionales de la forma

$$\frac{3m+1}{3n+1}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}$$

para la multiplicación. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

Tres funciones, que aplican $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ están definidas de la siguiente manera

$$f_1(m, n) = m - n + 4; \;\; f_2(m, n) = |m|; \;\; f_3(m, n) = m^2 - n^2 .$$

Dos funciones, que aplican $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ están definidas de la siguiente manera

$$g_1(k) = (2k, k); \;\; g_2(k) = \left(k, |k|\right).$$

(a) Halle el recorrido de

(i) $f_1 \circ g_1$;

(ii) $f_3 \circ g_2$. *[4 puntos]*

(b) Halle todas las soluciones de $f_1 \circ g_2(k) = f_2 \circ g_1(k)$. *[4 puntos]*

(c) Halle todas las soluciones de $f_3(m, n) = p$ en el caso $p = 1$ y en el caso $p = 2$. *[7 puntos]*