N08/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SE

88087228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Jueves 13 de noviembre de 2008 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Compruebe que la solución de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + 1,\ x > 0,$$

es $y = x(\ln x - 1)$, sabiendo que para $x = \mathrm{e}$, $y = 0$. *[5 puntos]*

(b) (i) Determine las tres primeras derivadas de la función $f(x) = x(\ln x - 1)$.

(ii) A partir de lo anterior, halle los tres primeros términos no nulos de la serie de Taylor para $f(x)$ alrededor de $x = 1$. *[7 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) (i) Compruebe que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+p)} \mathrm{d}x$, $p \neq 0$ es convergente si $p > -1$ y halle su valor en función de p.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que la siguiente serie es convergente.

$$\frac{1}{1 \times 0,5} + \frac{1}{2 \times 1,5} + \frac{1}{3 \times 2,5} + \cdots$$

[8 puntos]

(b) Determine, para cada una de las siguientes series, si es convergente o divergente.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{n(n+3)}\right)$

(ii) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{1}{12}} + \sqrt{\frac{1}{20}} + \cdots$ *[11 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

La función $f(x) = \dfrac{1+ax}{1+bx}$ se puede desarrollar como una serie de potencias de x, dentro de su radiode convergencia R, de la forma $f(x) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$.

(a) (i) Compruebe que $c_n = (-b)^{n-1}(a-b)$.

(ii) Indique el valor de R. *[5 puntos]*

(b) Determine los valores de a y b para los cuales el desarrollo de $f(x)$ coincide con el de e^x hasta el término en x^2 inclusive. *[4 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, halle una aproximación racional para $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Compruebe que la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x \cos^2 y$$

es $y = \operatorname{arctg}(1 + \operatorname{sen} x)$, sabiendo que para $x = \pi$, $y = \dfrac{\pi}{4}$. *[5 puntos]*

(b) Determine el valor de la constante a para el cual el siguiente límite existe

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(1 + \operatorname{sen} x) - a}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

y evalúe ese límite. *[12 puntos]*