88087227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Jueves 13 de noviembre de 2008 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) Convierta el número decimal $51\,966$ a base 16. *[4 puntos]*

(b) (i) Utilizando el algoritmo de Euclides, halle el máximo común divisor, d, de 901 y 612.

(ii) Halle dos números enteros p y q tales que $901p + 612q = d$.

(iii) Halle los menores números enteros positivos s y t tales que $901s - 612t = 85$. *[10 puntos]*

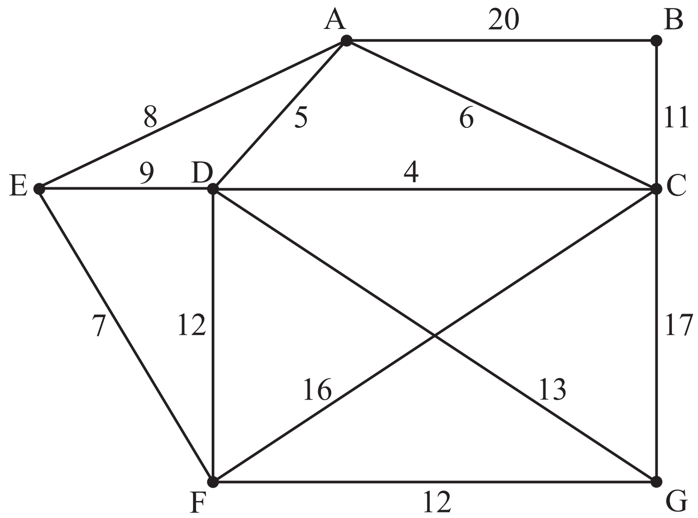
(c) Para cada uno de los siguientes casos, halle las soluciones (de haber alguna) de la congruencia lineal dada.

(i) $9x \equiv 3 \pmod{18}$

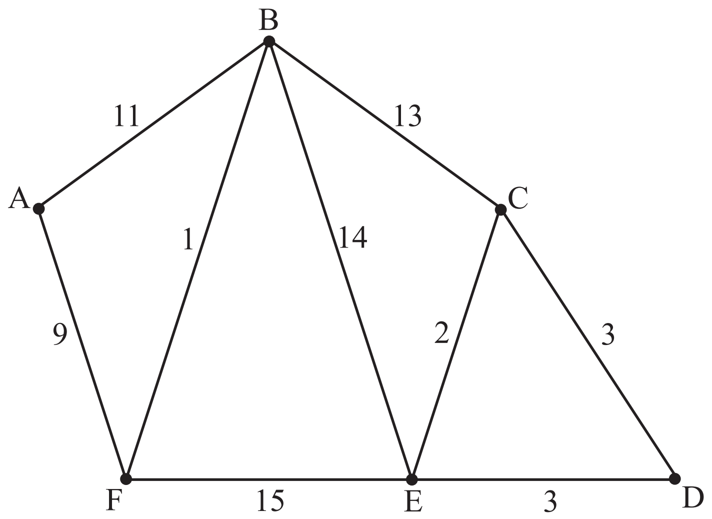
(ii) $9x \equiv 3 \pmod{15}$ *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar el árbol generador minimal para el siguiente grafo ponderado e indique su longitud. *[5 puntos]*



(b) Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar el camino más corto entre A y D en el siguiente grafo ponderado e indique su longitud. *[7 puntos]*



3. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Escriba 457 128 como producto de números primos. *[4 puntos]*

(b) Los números de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \in \mathbb{N}$ se denominan números de Fermat.

Halle el valor más pequeño de n para el cual el correspondiente número de Fermat tiene más de un millón de cifras. *[4 puntos]*

(c) Demuestre que $22 \mid 5^{11} + 17^{11}$. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Un grafo planario conexo G tiene e aristas y v vértices.

(i) Demuestre que $e \geq v - 1$.

(ii) Demuestre que $e = v - 1$ si y sólo si G es un árbol. *[4 puntos]*

(b) Un árbol tiene k vértices de grado 1, dos de grado 2, uno de grado 3 y uno de grado 4. Determine k y, a partir de lo anterior, dibuje un árbol que cumpla estas condiciones. *[6 puntos]*

(c) El grafo H tiene la siguiente matriz de adyacencia.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Explique por qué H no puede ser un árbol.

(ii) Dibuje el grafo de H. *[3 puntos]*

(d) Demuestre que un árbol es un grafo bipartido. *[4 puntos]*