N08/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX

88087226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Lunes 10 de noviembre de 2008 (mañana)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 7]*

En un triángulo ABC, $\hat{A} = 35^\circ$, $\text{BC} = 4 \text{ cm}$ y $\text{AC} = 6{,}5 \text{ cm}$. Halle los posibles valores de $\hat{B}$ y los correspondientes valores de AB.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Una progresión geométrica tiene como primer término 2 y la razón común es 1,05. Halle el valor del menor de los términos mayores de 500.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 7]*

Una variable aleatoria continua X tiene una función densidad de probabilidad dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^3}{60}, & \text{para } 1\le x\le 3,\\ 0, & \text{para los demás valores.}\end{cases}$$

Halle

(a) $\mathrm{P}(1{,}5\le X\le 2{,}5)$; *[2 puntos]*

(b) $\mathrm{E}(X)$; *[2 puntos]*

(c) la mediana de X. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

El ángulo entre el vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y el vector $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + m\boldsymbol{k}$ es de 30°.

Halle los valores de *m*.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 5]*

(a) Halle el conjunto de valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución.

$$x + 2y - 3z = k$$
$$3x + y + 2z = 4$$
$$5x + 7z = 5$$

[4 puntos]

(b) Describa la relación geométrica que existe entre los tres planos representados por este sistema de ecuaciones. *[1 punto]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 7]*

(a) Dibuje aproximadamente la curva $y = |\ln x| - |\cos x| - 0{,}1$, $0 < x < 4$, mostrando claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y las coordenadas de todos los máximos y mínimos locales. *[5 puntos]*

(b) Halle los valores de x para los cuales $|\ln x| > |\cos x| + 0{,}1$, $0 < x < 4$. *[2 puntos]*

7. *[Puntuación máxima: 8]*

(a) Ahmed está escribiendo con el ordenador las preguntas de la Sección A de un examen de matemáticas. El número de errores que comete, X, sigue una distribución de Poisson de media $3{,}2$. Halle la probabilidad de que Ahmed cometa exactamente cuatro errores. *[1 punto]*

(b) Su colega Levi está escribiendo con el ordenador la Sección B del examen. El número de errores que comete, Y, sigue una distribución de Poisson de media m.

(i) Si $\mathrm{E}(Y^2) = 5{,}5$, halle el valor de m.

(ii) Halle la probabilidad de que Levi cometa exactamente tres errores. *[5 puntos]*

(c) Sabiendo que X e Y son independientes, halle la probabilidad de que Ahmed cometa exactamente cuatro errores y Levi cometa exactamente tres errores. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Si $y = \ln\left(\frac{1}{3}(1+\mathrm{e}^{-2x})\right)$, compruebe que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}(\mathrm{e}^{-y} - 3)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 8]*

La población de mosquitos en determinada zona situada al borde de un lago se controla por medio de un pesticida. La tasa de disminución del número de mosquitos es proporcional al número de mosquitos en cualquier instante t. Sabiendo que la población disminuye de $500\,000$ a $400\,000$ en un período de cinco años, halle el tiempo, en años, que ha de transcurrir para que la población de mosquitos se reduzca a la mitad.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

10. *[Puntuación máxima: 18]*

(a) Escriba las ecuaciones vectoriales de las siguientes rectas dadas en forma paramétrica.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2 puntos]

(b) A partir de lo anterior, compruebe que estas dos rectas se cortan y halle el punto de intersección, A. *[5 puntos]*

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π que contiene estas dos rectas. *[4 puntos]*

(d) Sea B el punto de intersección del plano Π y la recta $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Halle las coordenadas de B. *[4 puntos]*

(e) Si C es el punto medio de AB, halle la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano Π y que pasa por C. *[3 puntos]*

11. *[Puntuación total: 21]*

Parte A *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Se considera que una caja de galletas tiene un peso insuficiente si pesa menos de 228 gramos. Se sabe que los pesos de estas cajas de galletas siguen una distribución normal, con una media de 231 gramos y una desviación típica de 1,5 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja tenga un peso insuficiente? *[2 puntos]*

(b) El fabricante decide que la probabilidad de que una caja tenga un peso insuficiente debería reducirse hasta un valor de 0,002.

(i) Bill sugiere aumentar la media y no modificar la desviación típica. Halle el valor de la nueva media.

(ii) Sarah sugiere reducir la desviación típica y no modificar la media. Halle el valor de la nueva desviación típica. *[6 puntos]*

(c) Después de haberse reducido a 0,002 la probabilidad de que una caja tenga un peso insuficiente, un grupo de clientes compra 100 cajas de galletas. Halle la probabilidad de que al menos dos de las cajas tengan un peso insuficiente. *[3 puntos]*

Parte B *[Puntuación máxima: 10]*

En el club de tenis de un colegio hay seis niños y cinco niñas. Se va a elegir un equipo integrado por dos niños y dos niñas para representar al colegio en un campeonato de tenis.

(a) ¿De cuántas maneras distintas se puede formar el equipo? *[3 puntos]*

(b) Tim es el menor de los niños del club y Anna es la menor de las niñas. ¿De cuántas maneras distintas puede formarse el equipo si este debe incluir a ambos? *[2 puntos]*

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo incluya tanto a Tim como a Anna? *[1 punto]*

(d) Fred es el mayor de los niños del club. Sabiendo que Fred ha sido seleccionado para formar parte del equipo, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo incluya a Tim o a Anna, pero no a ambos? *[4 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 21]*

La función f está definida por $f(x) = x\sqrt{9-x^2} + 2\arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$.

(a) Escriba el mayor dominio posible para cada uno de los dos términos de la función f y, a partir de lo anterior, indique el mayor dominio posible, D, para f. *[2 puntos]*

(b) Halle el volumen generado cuando la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2{,}8$ se rota 2π radianes alrededor del eje x. *[3 puntos]*

(c) Halle $f'(x)$ expresando el resultado de forma simplificada. *[5 puntos]*

(d) **A partir de lo anterior**, compruebe que

$$\int_{-p}^{p} \frac{11-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2p\sqrt{9-p^2} + 4\arcsen\left(\frac{p}{3}\right), \text{ donde } p \in D.$$ *[2 puntos]*

(e) Halle el valor de p para el cual el valor de la integral en (d) es máximo. *[2 puntos]*

(f) (i) Compruebe que $f''(x) = \dfrac{x(2x^2-25)}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(ii) A partir de lo anterior justifique por qué $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, pero no en $x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{2}}$. *[7 puntos]*