N08/5/MATHL/HP1/SPA/TZ0/XX

88087225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Viernes 7 de noviembre de 2008 (tarde)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

8808-7225

0114

14 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Cuando se divide $f(x) = x^4 + 3x^3 + px^2 - 2x + q$ por $(x-2)$ el resto es igual a 15, y $(x+3)$ es un factor de $f(x)$.

Halle los valores de p y q.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Escriba $\ln(x^2-1)-2\ln(x+1)+\ln(x^2+x)$ como un único logaritmo, de la forma más simplificada posible.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

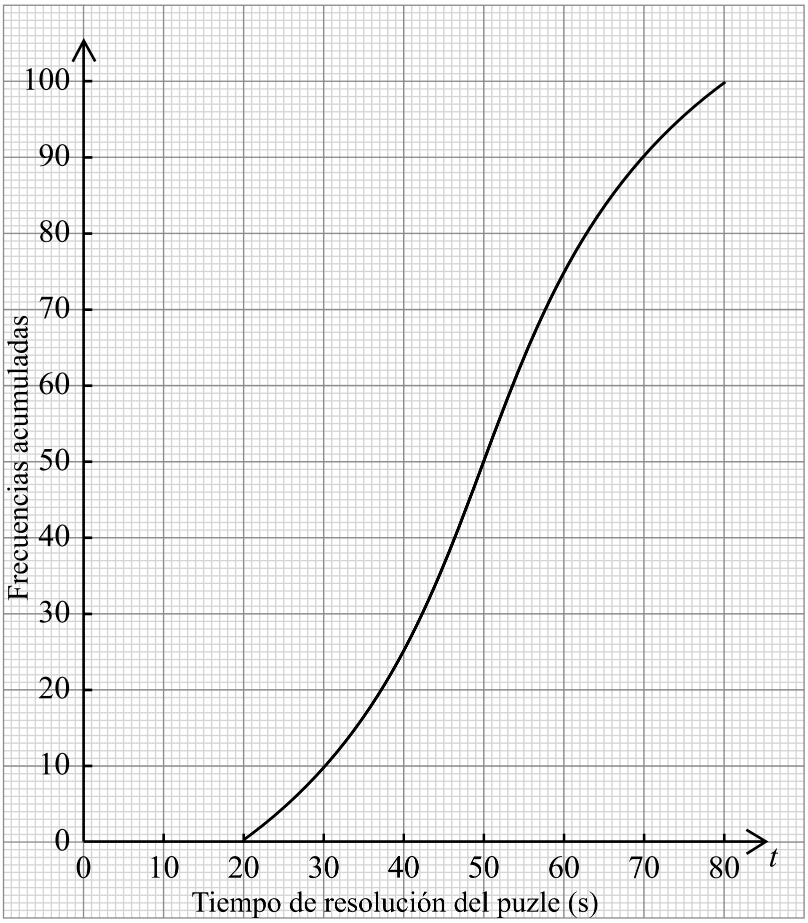
. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Una empresa de selección de personal realiza una prueba de aptitud a 100 candidatos que han solicitado un puesto de trabajo como ingeniero. Cada candidato ha de resolver un puzle, y se anota el tiempo, t, que tarda en resolverlo. A continuación se muestra la curva de frecuencias acumuladas correspondiente a estos datos.



Utilizando la curva de frecuencias acumuladas,

(a) escriba el valor de la mediana; *[1 punto]*

(b) determine el rango intercuartil; *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

(c) complete la tabla de frecuencias que aparece a continuación. *[2 puntos]*

Tiempo de resolución del puzle, en segundos	**Número de candidatos**
$20 < t \leq 30$	
$30 < t \leq 35$	
$35 < t \leq 40$	
$40 < t \leq 45$	
$45 < t \leq 50$	
$50 < t \leq 60$	
$60 < t \leq 80$	

4. *[Puntuación máxima: 4]*

Una cuerda de 81 metros se corta en n trozos de longitud creciente, formando estas longitudes una progresión aritmética cuya diferencia común es igual a d metros. Sabiendo que las longitudes del trozo más corto y del más largo son 1,5 metros y 7,5 metros respectivamente, halle los valores de n y d.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 5]*

Calcule el valor exacto de $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle la ecuación de la recta normal a la curva $5xy^2 - 2x^2 = 18$ en el punto $(1, 2)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 7]*

(a) Utilice las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$ para comprobar que la derivada de $\operatorname{tg} x$ es $\sec^2 x$. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, y haciendo uso de la relación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$, compruebe que la derivada de $\operatorname{arctg} x$ es $\frac{1}{1+x^2}$. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

John le quita la etiqueta a tres latas de sopa de tomate y a dos latas de sopa de pollo para participar en un sorteo, y guarda las latas. En ese momento, se da cuenta de que las latas son idénticas, por lo que no es posible distinguir las latas de sopa de tomate de las de sopa de pollo. Unas semanas más tarde, decide almorzar sopa de pollo. Abre las latas al azar, hasta abrir una lata de sopa de pollo. Sea Y el número de latas que abre.

Halle

(a) los posibles valores de Y, *[1 punto]*

(b) la probabilidad de cada uno de estos valores de Y, *[4 puntos]*

(c) el valor esperado de Y. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

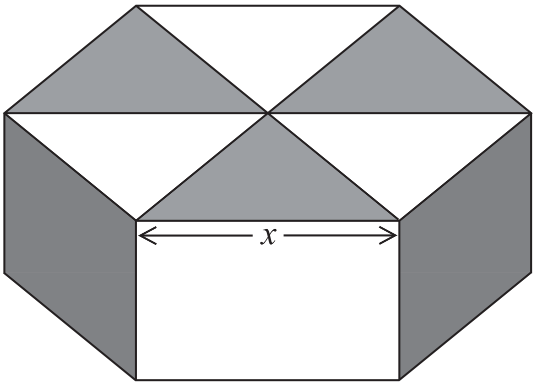
. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 8]*

Una empresa de embalajes fabrica cajas para bombones. A continuación se muestra como ejemplo una de estas cajas. La caja tiene tapa, y las partes superior e inferior de la caja son hexágonos regulares idénticos de lado x cm.



el diagrama no está a escala

(a) Compruebe que el área de cada hexágono es igual a $\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}\ \text{cm}^2$. *[1 punto]*

(b) Sabiendo que el volumen de la caja es igual a $90\ \text{cm}^3$, compruebe que cuando $x = \sqrt[3]{20}$ el valor de la superficie total de la caja alcanza un mínimo, justificando por qué este valor determina un mínimo. *[7 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Puntuación máxima: 6]*

Tres vectores no nulos distintos entre sí vienen dados por

$$\overrightarrow{\text{OA}} = \boldsymbol{a}\,,\ \overrightarrow{\text{OB}} = \boldsymbol{b}\,,\ \text{y}\ \overrightarrow{\text{OC}} = \boldsymbol{c}\,.$$

Si $\overrightarrow{\text{OA}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\text{BC}}$ y $\overrightarrow{\text{OB}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\text{CA}}$, compruebe que $\overrightarrow{\text{OC}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\text{AB}}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 21]*

(a) Dibuje aproximadamente la curva $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, $0 \le x \le \pi$. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, y en un diagrama aparte, dibuje aproximadamente la gráfica de $g(x) = \operatorname{cosec} 2x$, $0 \le x \le \pi$, indicando claramente las coordenadas de todos los máximos o mínimos locales, así como las ecuaciones de todas las asíntotas. *[5 puntos]*

(c) Compruebe que $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \equiv 2 \operatorname{cosec} 2x$. *[3 puntos]*

(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle las coordenadas de los máximos y mínimos locales de la gráfica de $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. *[5 puntos]*

(e) Halle la solución de la ecuación $\operatorname{cosec} 2x = 1{,}5 \operatorname{tg} x - 0{,}5$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. *[6 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Utilizando inducción matemática, demuestre que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{Z}^+ .$$

[9 puntos]

(b) Compruebe que el resultado sigue siendo válido para $n = -1$. *[5 puntos]*

13. *[Puntuación total: 25]*

Parte A *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Utilice el teorema de de Moivre para hallar las raíces de la ecuación $z^4 = 1 - \mathrm{i}$. *[6 puntos]*

(b) Dibuje con precisión estas raíces sobre un plano de Argand. *[2 puntos]*

(c) Si z_1 es la raíz situada en el primer cuadrante y z_2 es la raíz situada en el segundo cuadrante, halle $\frac{z_2}{z_1}$ expresándolo en la forma $a + \mathrm{i}b$. *[4 puntos]*

Parte B *[Puntuación máxima: 13]*

(a) Desarrolle y simplifique $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. *[2 puntos]*

(b) Sabiendo que b es una raíz de la ecuación $z^5 - 1 = 0$ que no pertenece al eje de los reales en el plano de Argand, compruebe que $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 = 0$. *[3 puntos]*

(c) Si $u = b + b^4$ y $v = b^2 + b^3$ compruebe que

(i) $u + v = uv = -1$;

(ii) $u - v = \sqrt{5}$, sabiendo que $u - v > 0$. *[8 puntos]*