IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

22077215

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3

Miércoles 16 de mayo de 2007 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas de una sola sección.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Estadística y probabilidad

1. *[Puntuación máxima: 8]*

(a) La variable aleatoria X sigue una distribución geométrica, siendo el parámetro $p = \frac{1}{4}$. ¿Cuál es el valor de $\mathrm{P}(X \le 4)$? *[3 puntos]*

(b) El dueño de una revista decide promocionarla incluyendo una entrada para un concierto en una de cada cuatro revistas, elegidas al azar. Sabiendo que necesitas 8 entradas para poder llevar a todos tus amigos al concierto, ¿cuál es la probabilidad de que consigas la última entrada al comprar la vigésima revista? *[3 puntos]*

(c) ¿Qué relación existe entre las dos distribuciones de los apartados (a) y (b)? *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) En una muestra aleatoria tomada en Suiza y compuesta por 1100 personas, se halló que 580 de ellas disponían de conexión a Internet. Calcule el intervalo de confianza del 95 % para la proporción de los habitantes de Suiza que disponen de conexión a Internet. *[7 puntos]*

(b) ¿Qué tamaño debería haber tenido la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza del 95 % fuera menor que 0,02? *[7 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

Se afirma que un determinado programa de entrenamiento puede mejorar el tiempo necesario para completar ciertas tareas. Se prueba ésto con voluntarios antes y después de haber tomado el programa de entrenamiento. En la tabla de abajo se muestran los tiempos, en minutos, antes y después del entrenamiento.

Voluntario	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Tiempo antes del entrenamiento	80	62	45	73	65	53	61	48	81	50	50	29	52	33	71
Tiempo después del entrenamiento	85	74	60	67	69	55	68	46	89	60	64	26	61	33	72

Estableciendo la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, aplique un test que considere apropiado con un nivel de significación del 1 % para determinar si se justifica la afirmación anterior. *[14 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Suponiendo que Y sigue una distribución de Poisson $\mathrm{Po}(\mu)$, compruebe que $\mathrm{P}(Y = y+1) = \frac{\mu}{y+1}\mathrm{P}(Y = y)$. *[3 puntos]*

(b) Se anotó la cantidad de coches que pasaron por un punto dado de una carretera en 80 intervalos de tiempo, todos de igual duración. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos.

Número de coches	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	4	18	19	20	11	8

Haga un test de χ^2 para la bondad del ajuste a un nivel de significación del 5 %, para decidir si los datos de la tabla se pueden ajustar a una distribución de Poisson. *[11 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 10]*

(a) Las variables independientes U y V son tales que $U \sim \mathrm{N}(66, 5)$ y $V \sim \mathrm{N}(19, 3)$. Calcule la probabilidad de que un valor observado de U seleccionado al azar sea más de tres veces mayor que un valor observado de V seleccionado al azar. *[6 puntos]*

(b) Sea X una variable aleatoria. Expandiendo la expresión $\mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2$ compruebe que $\mathrm{E}(X^2) \geq \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$. *[4 puntos]*

SECCIÓN B

Conjuntos, relaciones y grupos

1. *[Puntuación máxima: 7]*

Compruebe que la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida a continuación, es sobreyectiva pero no es inyectiva.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, \text{ si } x \text{ es par} \\ \dfrac{x+5}{2}, \text{ si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

[7 puntos]

2. *[Puntuación máxima: 10]*

Definimos la relación $(x, y) R (p, q)$ si y sólo si $x^2 - y^2 = p^2 - q^2$, donde $(x, y), (p, q) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^2$. Describa geométricamente la clase de equivalencia de $(1, 1)$. *[10 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

a y b son elementos pertenecientes al grupo G cuya operación binaria es la multiplicación.

(a) Utilice la inducción matemática para demostrar que $(bab^{-1})^n = ba^nb^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. *[8 puntos]*

(b) Compruebe que $(bab^{-1})^{-1} = ba^{-1}b^{-1}$. *[3 puntos]*

(c) Utilice las partes (a) y (b) para comprobar que $(bab^{-1})^n = ba^nb^{-1}$ para todo número entero negativo n. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Compruebe que el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a,\ b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ junto con el producto de matrices $(\times)$ constituye un grupo $\{M, \times\}$. *[6 puntos]*

(b) Halle un isomorfismo entre el grupo multiplicativo de los números complejos distintos de cero y el grupo $\{M, \times\}$. Justifique su respuesta. *[8 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Compruebe que todos los grupos cíclicos de orden igual o superior a tres tienen al menos dos generadores. *[6 puntos]*

6. *[Puntuación máxima: 8]*

Demuestre, para los conjuntos *A*, *B* y *C*, que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. *[8 puntos]*

SECCIÓN C

Series y ecuaciones diferenciales

1. *[Puntuación máxima: 9]*

Halle

(a) $\lim_{s \to 4} \left(\frac{s - \sqrt{3s+4}}{4-s} \right)$ *[4 puntos]*

(b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x} \right)$ *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Dibuje aproximadamente en papel milimetrado el campo de pendientes para la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - y$, en los puntos (x, y) tales que $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Utilice una escala de 2 cm para representar 1 unidad en ambos ejes. *[3 puntos]*

(b) Sobre el campo de pendientes, dibuje aproximadamente la curva que pasa por el punto $(0, 3)$. *[1 punto]*

(c) Resuelva la ecuación diferencial y para hallar la ecuación de esta curva. Exprese la respuesta en la forma $y = f(x)$. *[10 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

(a) Halle el valor de las constantes A y B para los cuales se cumple $\frac{1}{16r^2 + 8r - 3} = \frac{A}{4r-1} + \frac{B}{4r+3}$. *[4 puntos]*

(b) Halle una expresión para S_n, la suma parcial de los primeros n términos de la serie $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16r^2 + 8r - 3} \right)$. *[4 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, compruebe que la serie converge. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle el conjunto de valores de p para los cuales $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ converge. *[7 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 20]*

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (2x-1)\,y = 0$, sabiendo que $y = 2$ cuando $x = 0$.

(a) (i) Compruebe que $\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = (1-2x)\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} - 6\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

(ii) Hallando los valores de las sucesivas derivadas para $x = 0$, obtenga para y una serie de Maclaurin, hasta el término en x^4 inclusive. *[10 puntos]*

(b) Hay un máximo local de y para $x = 0{,}5$. Utilice su serie para calcular un valor aproximado de este máximo. *[2 puntos]*

(c) Utilice el método de Euler con un paso de 0,1 para obtener una segunda aproximación del valor máximo de y. Escriba la solución en forma de tabla. *[6 puntos]*

(d) ¿Cómo se puede conseguir que las aproximaciones obtenidas en (b) y (c) sean más precisas? *[2 puntos]*

SECCIÓN D

Matemáticas discretas

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Compruebe que $(x+y)^p \equiv (x^p + y^p)(\text{mod}\, p)$ donde $x,\ y \in \mathbb{Z}^+$ y p es un número primo. *[6 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar el $\text{mcd}(858,\ 714)$ y a partir de lo anterior, escriba el mcd como una combinación lineal de 858 y 714. *[12 puntos]*

(b) Se denomina punto reticular $(x,\ y)$ a un punto contenido en el plano cartesiano para el cual $x,\ y \in \mathbb{Z}$. Halle todos los puntos reticulares por los que pasa la recta $5x + 8y = 1$. *[5 puntos]*

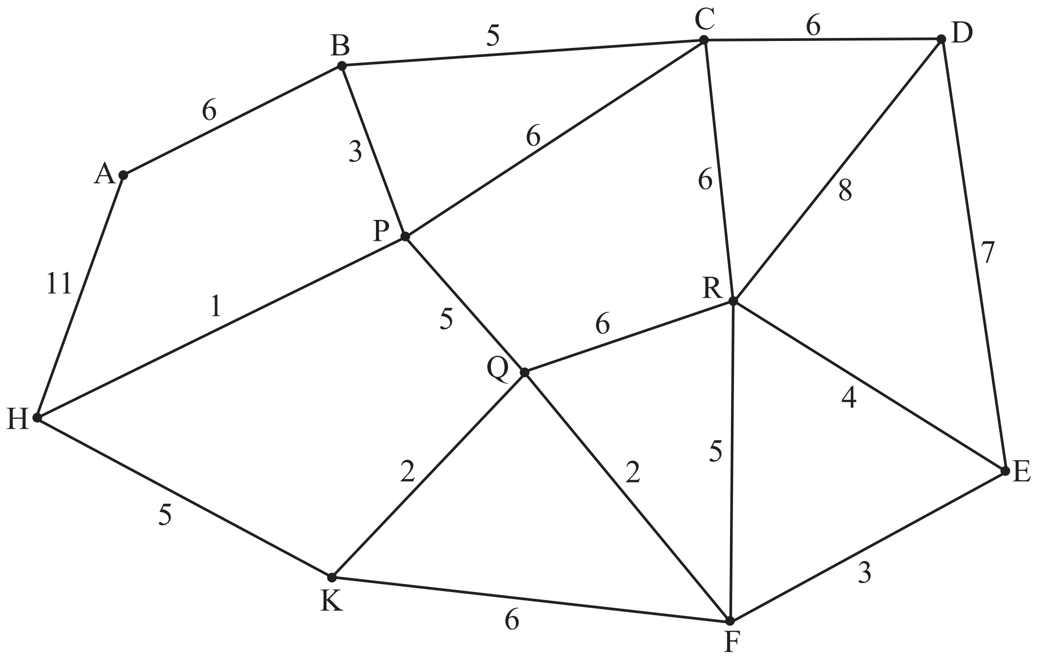
3. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Dibuje con precisión el grafo $K_{3,\,3}$. *[3 puntos]*

(b) Demuestre que $K_{3,\,3}$ no es planario. *[6 puntos]*

(c) Utilizando la notación habitual, la relación de Euler $v - e + f = 2$ se puede aplicar a grafos planarios conexos. Halle una fórmula que relacione v, e y f para un grafo planario no conexo que tenga x componentes. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 12]*



Arriba se muestra el grafo ponderado G. El grafo G' se genera borrando el vértice A de G.

(a) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar el árbol generador minimal del grafo G' y establezca su peso. *[5 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, halle el peso de un límite inferior para el ciclo hamiltoniano en G que comienza en el vértice A. *[2 puntos]*

(c) Demuestre que para un grafo **completo** con n vértices, no es necesario examinar más de $\frac{(n-1)!}{2}$, $n \geq 3$ ciclos hamiltonianos para hallar el ciclo hamiltoniano de menor peso. *[4 puntos]*

(d) ¿Cuántos ciclos en G deberían ser analizados para encontrar uno con el menor peso? *[1 punto]*

5. *[Puntuación máxima: 10]*

Demuestre que $42 \mid (n^7 - n)$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$. *[10 puntos]*