M07/5/MATHL/HP3/FRE/TZ0/XX

22077212

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3

Mercredi 16 mai 2007 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions d'une seule section.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

Statistiques et probabilités

1. *[Note maximale : 8]*

(a) Une variable aléatoire X a une distribution géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$.

Quelle est la valeur de $\mathrm{P}(X \le 4)$? *[3 points]*

(b) L'éditeur d'un magazine fait la promotion de son magazine en insérant de façon aléatoire un ticket de concert dans un magazine sur quatre. Si vous avez besoin de 8 tickets pour emmener des amis au concert, quelle est la probabilité que vous trouviez votre dernier ticket au moment où vous achetez votre 20^{e} magazine ? *[3 points]*

(c) Quel est le rapport entre les deux distributions des parties (a) et (b) ? *[2 points]*

2. *[Note maximale : 14]*

(a) En Suisse, dans un échantillon aléatoire de 1100 personnes, on a trouvé que 580 d'entre elles avaient une connexion Internet. Déterminez l'intervalle de confiance de 95 % pour la proportion de personnes en Suisse qui ont une connexion Internet. *[7 points]*

(b) Quelle taille devrait avoir l'échantillon pour que la largeur de l'intervalle de confiance de 95 % soit inférieure à 0,02 ? *[7 points]*

3. *[Note maximale : 14]*

On affirme qu'un programme d'entraînement particulier améliore le temps nécessaire pour réaliser une tâche donnée. On teste des volontaires par rapport à cette tâche avant et après le programme d'entraînement. Les temps, en minutes, avant et après l'entraînement, sont donnés dans le tableau suivant.

Volontaire	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Temps avant l'entraînement	80	62	45	73	65	53	61	48	81	50	50	29	52	33	71
Temps après l'entraînement	85	74	60	67	69	55	68	46	89	60	64	26	61	33	72

En précisant les hypothèses nulle et alternative, effectuez un test approprié avec un seuil de signification de 1 % pour décider si cette affirmation est justifiée. *[14 points]*

4. *[Note maximale : 14]*

(a) Si Y a la distribution de Poisson $\mathrm{Po}(\mu)$, montrez que
$\mathrm{P}(Y = y+1) = \dfrac{\mu}{y+1}\mathrm{P}(Y = y)$. *[3 points]*

(b) Le nombre de voitures passant par un certain point d'une route a été enregistré sur 80 intervalles de temps égaux et est résumé dans le tableau suivant.

Nombre de voitures	0	1	2	3	4	5
Effectifs	4	18	19	20	11	8

Effectuez un test d'ajustement du χ^2 au seuil de signification de 5 % pour décider si les données ci-dessus peuvent être modélisées par une distribution de Poisson. *[11 points]*

5. *[Note maximale : 10]*

(a) Les variables indépendantes U et V sont telles que $U \sim \mathrm{N}(66\,;5)$ et $V \sim \mathrm{N}(19\,;3)$. Calculez la probabilité qu'une réalisation aléatoire de U soit supérieure à trois fois une réalisation aléatoire de V. *[6 points]*

(b) Soit X une variable aléatoire. En développant l'expression $\mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2$ montrez que $\mathrm{E}(X^2) \geq \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$. *[4 points]*

SECTION B

Ensembles, relations et groupes

1. *[Note maximale : 7]*

Montrez que la fonction $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définie plus bas est une surjection et n'est pas une injection.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & \text{si } x \text{ est pair;}\\ \dfrac{x+5}{2}, & \text{si } x \text{ est impair.}\end{cases}$$ *[7 points]*

2. *[Note maximale : 10]*

On définit la relation $(x\,;y)\,R\,(p\,;q)$ si et seulement si $x^2-y^2=p^2-q^2$ avec $(x\,;y),(p\,;q)\in\mathbb{R}^2$. Démontrez que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$. Décrivez géométriquement la classe d'équivalence de $(1\,;1)$. *[10 points]*

3. *[Note maximale : 15]*

Les éléments a et b sont des éléments du groupe G dont l'opération binaire est la multiplication.

(a) Utilisez un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}^+$, on a $(bab^{-1})^n=ba^nb^{-1}$. *[8 points]*

(b) Montrez que $(bab^{-1})^{-1}=ba^{-1}b^{-1}$. *[3 points]*

(c) Utilisez les parties (a) et (b) pour montrer que $(bab^{-1})^n=ba^nb^{-1}$ pour tout entier négatif n. *[4 points]*

4. *[Note maximale : 14]*

(a) Montrez que l'ensemble $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a,\ b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ muni de la multiplication des matrices $(\times)$ forme un groupe $\{M, \times\}$. *[6 points]*

(b) Trouvez un isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres complexes non-nuls dans le groupe $\{M, \times\}$. Justifiez votre réponse. *[8 points]*

5. *[Note maximale : 6]*

Montrez que tout groupe cyclique d'ordre supérieur ou égal à trois possède au moins deux générateurs. *[6 points]*

6. *[Note maximale : 8]*

Démontrez que, pour des ensembles A, B et C, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. *[8 points]*

SECTION C

Séries et équations différentielles

1. *[Note maximale : 9]*

Trouvez

(a) $\lim\limits_{s\to 4}\left(\dfrac{s-\sqrt{3s+4}}{4-s}\right)$; *[4 points]*

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}\right)$. *[5 points]*

2. *[Note maximale : 14]*

(a) Esquissez sur du papier millimétré le champ de pentes de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ aux points $(x\,;y)$ avec $x\in\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et $y\in\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$. Utilisez 2 cm pour 1 unité sur les deux axes. *[3 points]*

(b) Sur le champ de pentes, esquissez la courbe passant par le point (0 ; 3). *[1 point]*

(c) Résolvez l'équation différentielle pour trouver l'équation de cette courbe. Donnez votre réponse sous la forme $y=f(x)$. *[10 points]*

3. *[Note maximale : 10]*

(a) Trouvez les constantes A et B telles que $\dfrac{1}{16r^2+8r-3}=\dfrac{A}{4r-1}+\dfrac{B}{4r+3}$. *[4 points]*

(b) Trouvez une expression pour S_n, la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{16r^2+8r-3}\right)$. *[4 points]*

(c) À partir de là, montrez que la serie converge. *[2 points]*

4. *[Note maximale : 7]*

Trouvez les valeurs de p pour lesquelles $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ converge. *[7 points]*

5. *[Note maximale : 20]*

Considérez l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (2x-1)\,y = 0$ sachant que $y = 2$ quand $x = 0$.

(a) (i) Montrez que $\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = (1-2x)\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} - 6\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

(ii) En calculant les valeurs des dérivées successives en $x = 0$, déterminez pour y une série de Maclaurin jusqu'au terme en x^4 inclus. *[10 points]*

(b) Les valeurs de y présentent un maximum local pour $x = 0{,}5$. Utilisez votre série pour calculer une approximation de cette valeur maximum. *[2 points]*

(c) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de 0,1 pour obtenir une deuxième approximation de cette valeur maximum de y. Présentez votre solution sous la forme d'un tableau. *[6 points]*

(d) De quelle manière chacune des approximations trouvées en (b) et en (c) peuvent-elles être rendues plus précises ? *[2 points]*

SECTION D

Mathématiques discrètes

1. *[Note maximale : 6]*

Montrez que $(x+y)^p \equiv (x^p + y^p) \pmod p$ avec $x, y \in \mathbb{Z}^+$ et p un nombre premier. *[6 points]*

2. *[Note maximale : 17]*

(a) Utilisez l'algorithme d'Euclide pour trouver le $\text{pgcd}(858 ; 714)$ et à partir de là, donnez le pgcd comme une combinaison linéaire de 858 et 714. *[12 points]*

(b) Un point treillis $(x ; y)$ est un point du plan cartésien pour lequel $x, y \in \mathbb{Z}$. Trouvez tous les points treillis par lesquels passe la droite $5x + 8y = 1$. *[5 points]*

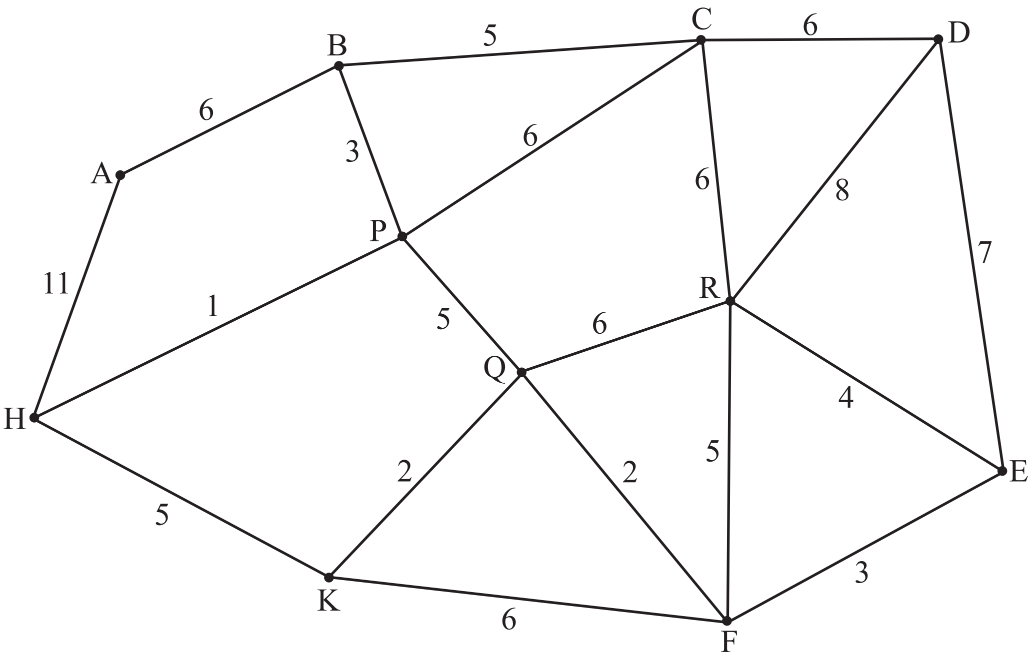
3. *[Note maximale : 15]*

(a) Dessinez le graphe $K_{3,3}$. *[3 points]*

(b) Démontrez que $K_{3,3}$ n'est pas planaire. *[6 points]*

(c) Avec les notations usuelles, la relation d'Euler $v - e + f = 2$ s'applique aux graphes connexes planaires. Trouvez une relation entre v, e et f pour un graphe planaire non connexe qui a x composantes. *[6 points]*

4. *[Note maximale : 12]*



Le graphe pondéré G est représenté ci-dessus. Le graphe G' est obtenu en supprimant de G le sommet A.

(a) Utilisez l'algorithme de Kruskal pour trouver l'arbre couvrant minimal du graphe G' et précisez son poids. *[5 points]*

(b) À partir de là, trouvez une borne inférieure pour le poids d'un cycle hamiltonien dans G commençant au sommet A. *[2 points]*

(c) Démontrez que pour un graphe **complet** de n sommets $n \geq 3$, il n'y a pas besoin d'examiner plus de $\frac{(n-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens pour trouver le cycle hamiltonien de poids minimal. *[4 points]*

(d) Combien de cycles dans G devrait-on examiner pour trouver celui de poids minimal ? *[1 point]*

5. *[Note maximale : 10]*

Démontrez que $42 \,|\, (n^7 - n)$ avec $n \in \mathbb{Z}^+$. *[10 points]*