MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Mardi 8 mai 2007 (matin)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 27]*

Considérez les vecteurs $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

(a) Sachant que $\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$, trouvez les valeurs de m et de n. *[5 points]*

(b) Trouvez un vecteur unitaire, $\boldsymbol{u}$, qui soit normal à la fois à $\boldsymbol{a}$ et à $\boldsymbol{b}$. *[5 points]*

(c) Le plan π_1 contient le point $\mathrm{A}(1\,;-1\,;\,1)$ et est normal à $\boldsymbol{b}$. Ce plan intersecte respectivement les axes Ox, Oy et Oz aux points L, M et N.

(i) Trouvez une équation cartésienne de π_1.

(ii) Donnez les coordonnées de L, M et N. *[5 points]*

(d) La droite passant par l'origine, O, normale à π_1 coupe π_1 au point P.

(i) Trouvez les coordonnées de P.

(ii) **À partir de là**, trouvez la distance de l'origine à π_1. *[7 points]*

(e) Le plan π_2 a pour équation $x + 2y + 4z = 4$. Calculez l'angle entre π_2 et une droite parallèle à $\boldsymbol{a}$. *[5 points]*

2. *[Note maximum : 21]*

Partie A *[Note maximale : 11]*

Pour des bus circulant entre deux villes, la durée du trajet est normalement distribuée avec une moyenne de 35 minutes et un écart-type de 7 minutes.

(a) Trouvez la probabilité qu'un bus choisi au hasard achève le trajet en moins de 40 minutes. *[2 points]*

(b) 90 % des bus achèvent le trajet en moins de t minutes. Trouvez la valeur de t. *[5 points]*

(c) Pour un échantillon aléatoire de 10 bus, on a enregistré la durée du trajet entre les deux villes. Trouvez la probabilité qu'il y ait exactement 6 de ces bus qui achèvent le trajet en moins de 40 minutes. *[4 points]*

Partie B *[Note maximale : 10]*

Le nombre d'accident de bus sur une période donnée a une distribution de Poisson avec une moyenne de 0,6 accident par jour.

(a) Trouvez la probabilité qu'il y ait au moins deux accidents pendant une journée choisie au hasard. *[4 points]*

(b) Trouvez le nombre d'accidents le plus probable pouvant arriver pendant une journée choisie au hasard. Justifiez votre réponse. *[3 points]*

(c) Trouvez la probabilité qu'aucun accident n'arrive pendant une semaine de sept jours choisie au hasard. *[3 points]*

3. *[Note maximale : 22]*

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Trouvez les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ est singulière. *[5 points]*

Soit $\boldsymbol{A}^2 + m\boldsymbol{A} + n\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) (i) Trouvez les valeurs de *m* et de *n*.

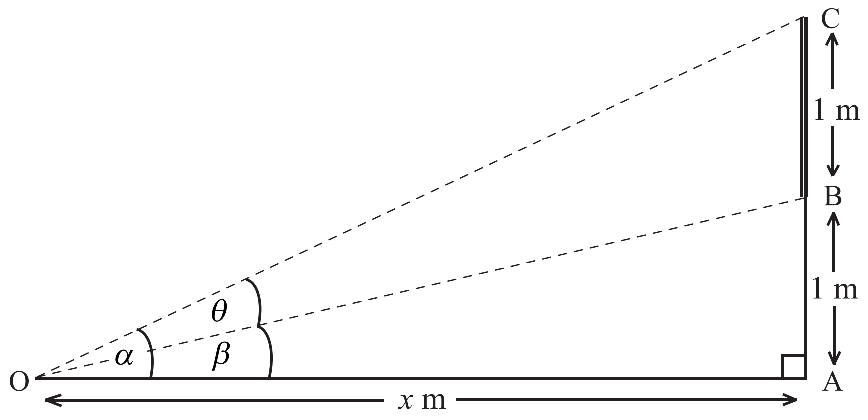
(ii) À partir de là, montrez que $\boldsymbol{I} = \frac{1}{5}\boldsymbol{A}(6\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

(iii) Utilisez le résultat de la **partie (b)(ii)** pour expliquer pourquoi $\boldsymbol{A}$ est non singulière. *[12 points]*

(c) Utilisez les valeurs de la **partie (b)(i)** pour exprimer $\boldsymbol{A}^4$ sous la forme $p\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{I}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. *[5 points]*

4. *[Note maximale : 22]*

Un écran de télévision, BC, d'une hauteur d'un mètre, est encastré dans un mur. Le bas de l'écran de télévision au point B est à un mètre au dessus du niveau de l'œil d'un observateur. Les angles d'élévation ($\mathrm{A\hat{O}C}$, $\mathrm{A\hat{O}B}$) depuis l'œil de l'observateur, au point O, jusqu'au haut et au bas de l'écran de télévision sont respectivement de α et β radians. La distance horizontale de l'œil de l'observateur jusqu'au mur contenant l'écran de télévision est de x mètres. L'angle de vision de l'observateur ($\mathrm{B\hat{O}C}$) est de θ radians, comme représenté ci-dessous.



(a) (i) Montrez que $\theta = \arctan\dfrac{2}{x} - \arctan\dfrac{1}{x}$.

(ii) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez la valeur **exacte** de x pour laquelle θ est maximum et justifiez le fait que cette valeur de x donne la valeur maximum de θ.

(iii) Trouvez la valeur maximum de θ. *[17 points]*

(b) Trouvez à quel endroit doit se tenir l'observateur pour que son angle de vision soit de 15°. *[5 points]*

5. *[Note maximale : 28]*

Soit $u = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ et $v = 1 + \mathrm{i}$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

(a) (i) Montrez que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$.

(ii) En exprimant à la fois *u* et *v* sous forme module et argument, montrez que $\dfrac{u}{v} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(iii) **À partir de là**, trouvez la valeur **exacte** de $\tan\dfrac{\pi}{12}$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$. *[15 points]*

(b) Utilisez un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour $n \in \mathbb{Z}^+$,
$\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$. *[7 points]*

(c) Soit $z = \dfrac{\sqrt{2}v + u}{\sqrt{2}v - u}$.

Montrez que $\mathrm{Re}\, z = 0$. *[6 points]*