MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Lunes 7 de mayo de 2007 (tarde)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

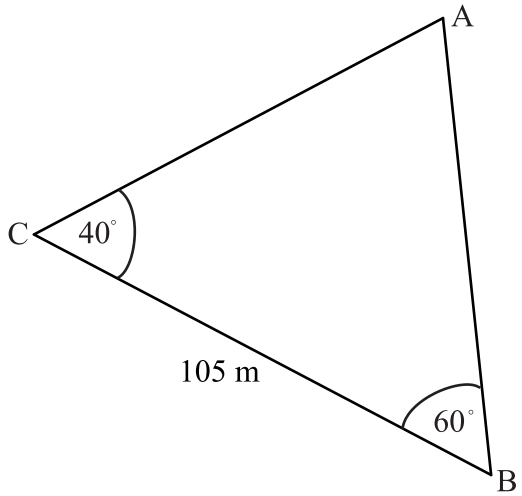
0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. El siguiente diagrama muestra ΔABC, donde $\text{BC} = 105\text{ m}$, $\text{A}\hat{\text{C}}\text{B} = 40^\circ$, $\text{A}\hat{\text{B}}\text{C} = 60^\circ$.



Halle AB.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. A continuación se muestra el número de bombillas defectuosas por caja encontradas en una muestra compuesta por 50 cajas de bombillas.

Número de bombillas defectuosas por caja	0	1	2	3	4	5	6
Número de cajas	7	3	15	11	6	5	3

(a) Calcule la mediana de la cantidad de bombillas defectuosas por caja.

(b) Calcule la cantidad media de bombillas defectuosas por caja.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. Halle el coseno del ángulo θ que forman los planos π_1 y π_2, donde π_1 tiene por ecuación $-2x + y - z = 2$ y π_2 tiene por ecuación $x + 2y - z = 6$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. Resuelva $2(\ln x)^2 = 3\ln x - 1$ para la variable x. Dé las respuestas de forma **exacta**.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$, sabiendo que $y = 1$ cuando $x = 0$.
Exprese la respuesta en la forma $y = f(x)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. Sabiendo que $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ son los vectores de posición de los puntos A, B y C respectivamente, calcule el área del triángulo ABC.

7. Un examen de biología consta de siete preguntas de opción múltiple. Cada pregunta tiene cinco posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Para aprobar el examen hace falta responder correctamente al menos cuatro preguntas. Juan no sabe las respuestas, por lo tanto, para cada pregunta elige una respuesta al azar.

(a) Halle la probabilidad de que Juan responda exactamente cuatro preguntas en forma correcta.

(b) Halle la probabilidad de que Juan apruebe el examen de biología.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. Considere el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, donde $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}$ y $k \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $\det \boldsymbol{A}$.

(b) Halle el conjunto de valores de k para los cuales el sistema de ecuaciones presenta una solución única.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. Una partícula se mueve en línea recta. Transcurrido un tiempo t segundos, su desplazamiento respecto a un punto fijo O es igual a s metros, y su velocidad v en metros por segundo viene dada por la expresión $v = 3t^2 - 4t + 2$, con $t \geq 0$. Cuando $t = 0$, $s = -3$. Halle el valor de t para el cual la partícula se encuentra en O.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. La función densidad de probabilidad f de una variable aleatoria continua X viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi(x^2+4)}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) Indiquez la moda de X.

(b) Halle el valor **exacto** de $\mathrm{E}(X)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

11. El polinomio $P(z) = z^3 + mz^2 + nz - 8$ es divisible por $(z + 1 + \mathrm{i})$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{R}$. Halle el valor de m y de n.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

12. La función f viene dada por $f(x) = x^2 - 2x + k(3k + 2)$ donde $k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los cuales $f(x) = 0$ presenta dos raíces reales distintas.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

13. Considere la serie aritmética $-6 + 1 + 8 + 15 + \ldots$.
Halle el menor número de términos necesarios para que la suma de la serie sea mayor que $10\,000$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

14. La gráfica de $y = \cos x$ es transformada en la gráfica de $y = 8 - 2\cos\frac{\pi x}{6}$.

Halle una secuencia de transformaciones geométricas sencillas que logre hacer esto.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

15. La gráfica de $y = \text{sen}(3x)$ para $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ se rota 2π radianes alrededor del eje x.

Halle el volumen **exacto** del sólido de revolución así generado.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

16. La longitud de una especie particular de lagarto sigue una distribución normal, con una longitud media igual a 50 cm y una desviación típica de 4 cm. Se escoge un lagarto al azar.

(a) Halle la probabilidad de que su longitud sea superior a 45 cm.

(b) Sabiendo que su longitud es superior a 45 cm, halle la probabilidad de que su longitud sea superior a 55 cm.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

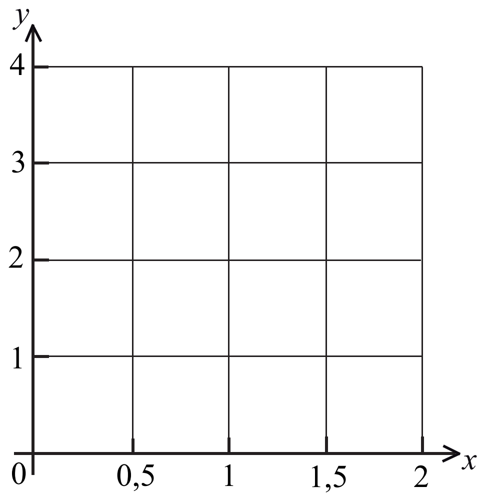
. . . .

. . . .

. . . .

17. Sea $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$, para $x \geq \frac{1}{2}$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de f y la de g en la siguiente cuadrícula.



(b) Sea A la región delimitada completamente por las gráficas de f y g.
Halle el área de A.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

18. La función f se define como: $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 6}$ para $x \geq b$, y donde $b \in \mathbb{R}$.

(a) Compruebe que $f'(x) = \dfrac{12 - 2x^2}{(x^2 + 6)^2}$.

(b) A partir de lo anterior, halle el menor valor **exacto** de b para el cual existe la función inversa f^{-1}. Justifique su respuesta.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

19. Halle $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$, expresando su respuesta en forma **exacta**.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

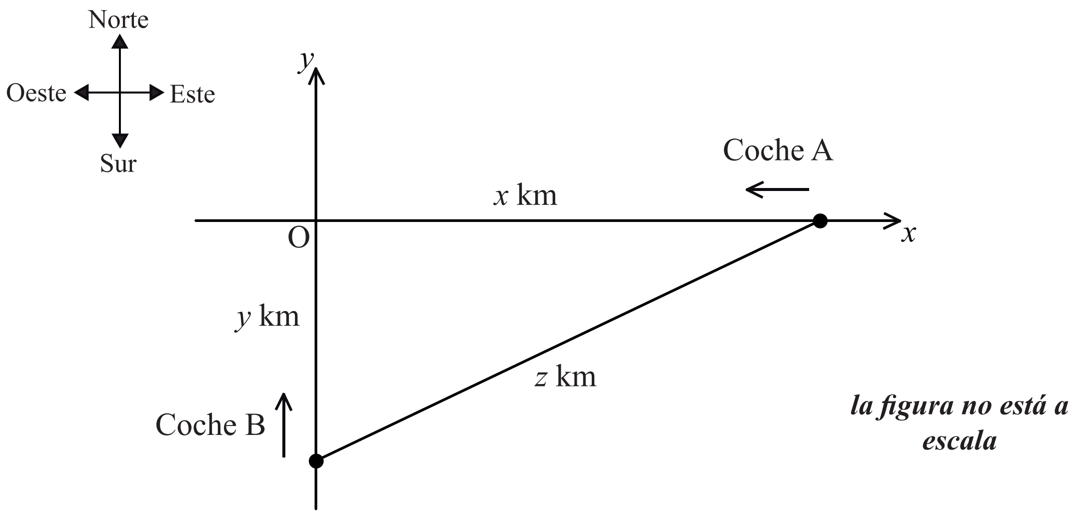
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

20. El coche A viaja por una carretera recta con orientación este-oeste, en dirección oeste y a $60\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$. El coche B viaja por una carretera recta con orientación norte-sur, en dirección norte y a $70\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$. Las carreteras se cruzan en el punto O. Cuando el coche A se encuentra a x km al este de O, y el coche B se encuentra a y km al sur de O, la distancia entre los coches es igual a z km.



Halle la tasa de cambio de z cuando el coche A se encuentra a 0,8 km al este de O y el coche B se encuentra a 0,6 km al sur de O.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .