M07/5/MATHL/HP1/FRE/TZ0/XX

22077210

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Lundi 7 mai 2007 (après-midi)

2 heures

Numéro de session du candidat

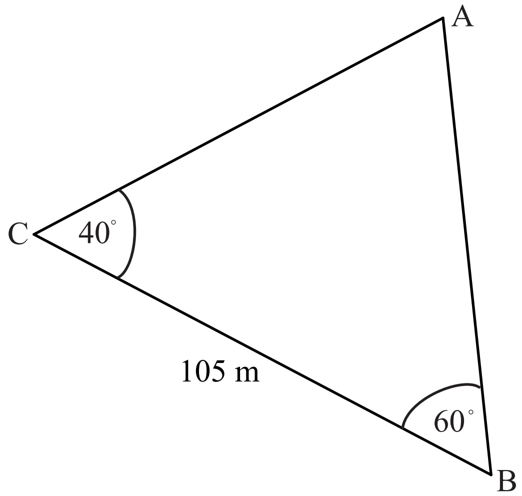
0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. La figure suivante représente un $\Delta \mathrm{ABC}$, avec $\mathrm{BC} = 105 \text{ m}$, $\mathrm{A\hat{C}B} = 40^\circ$, $\mathrm{A\hat{B}C} = 60^\circ$.



Trouvez AB.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Dans un échantillon de 50 boîtes d'ampoules électriques, le nombre d'ampoules défectueuses dans chaque boîte est donné ci-dessous.

Nombre d'ampoules défectueuses par boîte	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de boîtes	7	3	15	11	6	5	3

(a) Calculez le nombre médian d'ampoules défectueuses par boîte.

(b) Calculez le nombre moyen d'ampoules défectueuses par boîte.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. Trouvez le cosinus de l'angle θ entre les plans π_1 et π_2, où l'équation de π_1 est $-2x+y-z=2$ et l'équation de π_2 est $x+2y-z=6$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. Résolvez pour x : $2(\ln x)^2 = 3\ln x - 1$. Donnez vos réponses sous forme **exacte**.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. Résolvez l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ sachant que $y = 1$ quand $x = 0$.
Donnez votre réponse sous la forme $y = f(x)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. Sachant que $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ sont respectivement les vecteurs position des points A, B et C, calculez l'aire du triangle ABC.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. Un test en biologie consiste en sept questions à choix multiples. Chaque question a cinq réponses possibles parmi lesquelles une seule est correcte. Il faut donner au moins quatre réponses correctes pour réussir le test. Juan ne connaît aucune réponse ; pour chaque question, il choisit donc sa réponse au hasard.

(a) Trouvez la probabilité que Juan réponde correctement à exactement quatre questions.

(b) Trouvez la probabilité que Juan réussisse le test de biologie.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. Considérez le système d'équations $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ avec $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez $\det \boldsymbol{A}$.

(b) Trouvez l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles ce système a une solution unique.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. Une particule se déplace sur une ligne droite. À l’instant t en secondes, sa position à partir d’un point fixe O est s en mètres, et sa vitesse, v en mètres par seconde, est donnée par $v = 3t^2 - 4t + 2$, $t \geq 0$. Quand $t = 0$, $s = -3$. Trouvez la valeur de t quand la particule est en O.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. Une variable aléatoire continue X a la fonction de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi(x^2+4)}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(a) Indiquez le mode de X.

(b) Trouvez la valeur **exacte** de $\mathrm{E}(X)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

11. Le polynôme $P(z) = z^3 + mz^2 + nz - 8$ est divisible par $(z + 1 + \mathrm{i})$, avec $z \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{R}$. Trouvez les valeurs de m et de n.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

12. La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 2x + k(3k+2)$ avec $k \in \mathbb{R}$. Trouvez l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles $f(x) = 0$ a deux racines réelles distinctes.

13. Considérez la série arithmétique $-6+1+8+15+\ldots$.
Trouvez le plus petit nombre de termes tel que la somme de la série soit supérieure à $10\,000$.

14. La représentation graphique de $y = \cos x$ est transformée en la représentation graphique de $y = 8 - 2\cos\frac{\pi x}{6}$.

Trouvez une suite de transformations géométriques simples qui réalise cela.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

15. La représentation graphique de $y = \sin(3x)$ avec $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ fait une rotation de 2π radians autour de l'axe des abscisses. Trouvez le volume **exact** du solide de révolution engendré.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

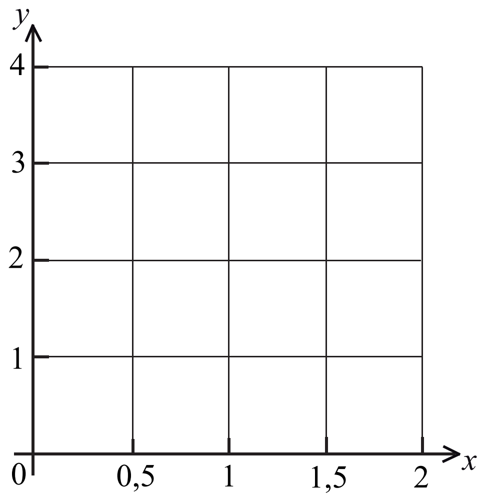
16. Les longueurs des lézards d'une certaine espèce sont normalement distribuées avec une longueur moyenne de 50 cm et un écart-type de 4 cm. Un lézard est choisi au hasard.

(a) Trouvez la probabilité que sa longueur soit supérieure à 45 cm.

(b) Sachant que sa longueur est supérieure à 45 cm, trouvez la probabilité que sa longueur soit supérieure à 55 cm.

17. Pour $x \geq \frac{1}{2}$, soit $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ et $g(x) = \sqrt{2x-1}$.

(a) Esquissez les représentations graphiques de f et de g sur le repère ci-dessous.



(b) Soit A la région limitée par les représentations graphiques de f et g.
Trouvez l'aire de A.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

18. La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+6}$ pour $x \geq b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que $f'(x)=\dfrac{12-2x^2}{(x^2+6)^2}$.

(b) À partir de là, trouvez la plus petite valeur **exacte** de b pour laquelle la fonction réciproque f^{-1} existe. Justifiez votre réponse.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

19. Trouvez $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$, en exprimant votre réponse sous forme **exacte**.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

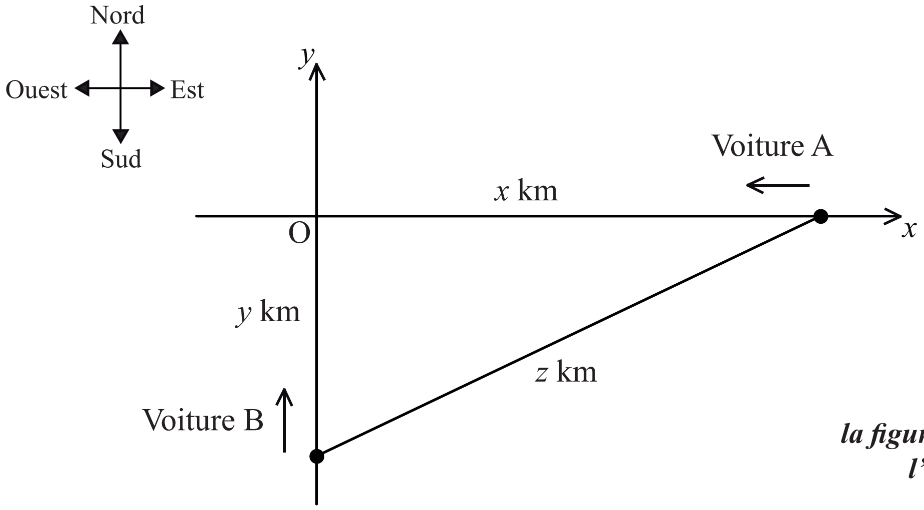
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

20. La voiture A roule à 60 km h^{-1} vers l'ouest sur une route droite orientée est-ouest. La voiture B roule à 70 km h^{-1} vers le nord sur une route droite orientée nord-sud. Les routes se coupent en un point O. Quand la voiture A est à x km à l'est de O, et que la voiture B est à y km au sud de O, la distance entre les voitures est z km.



la figure n'est pas à l'échelle

Trouvez le taux de variation instantané de z quand la voiture A est à 0,8 km à l'est de O et la voiture B est à 0,6 km au sud de O.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .