IBO
IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N05/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX

88057214

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Viernes 4 de noviembre de 2005 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección*

1. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Dado que $\dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} \equiv \dfrac{a}{(1+x)} + \dfrac{bx+c}{(1+x^2)}$, calcule el valor de *a,* de *b* y de *c*. *[5 puntos]*

(b) (i) A partir de lo anterior, halle $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

(ii) Si $I = \dfrac{\pi}{4}$ cuando $x = 1$, calcule el valor de la constante de integración. Exprese su respuesta en la forma $p + q\ln r$ donde $p, q, r \in \mathbb{R}$. *[7 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) (a) Sea $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -1 & -k & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$. Halle $\det \boldsymbol{M}$. *[2 puntos]*

(b) Halle los valores de *k* para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones **no** tiene una única solución.

$$\begin{aligned} -x - ky + 3z &= -1 \\ 4x + 5y + z &= 2 \\ x - y + kz &= 1 \end{aligned}$$

[3 puntos]

(ii) El plano π contiene la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-5}{6}$ y el punto (1, −2, 3).

(a) Compruebe que la ecuación de π es $6x + 2y - 3z = -7$. *[7 puntos]*

(b) Calcule la distancia del plano π al origen. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 17]*

(i) En un juego un jugador paga una cuota de entrada de \$ n. Entonces elige un número de entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 y lanza tres dados estándar.

Si el número que eligió aparece en los tres dados, gana cuatro veces su cuota de entrada.

Si el número aparece en exactamente dos de los dados, gana tres veces su cuota de entrada.

Si el número aparece en exactamente uno de los dados, gana dos veces su cuota de entrada.

Si el número no aparece en ninguno de los dados, no gana nada.

(a) Copie y complete la tabla de probabilidad que aparece debajo. *[4 puntos]*

Ganancia (\$)	$-n$	n	$2n$	$3n$
Probabilidad		$\frac{75}{216}$		

(b) Compruebe que la ganancia esperada es \$ $\left(-\frac{17n}{216}\right)$. *[2 puntos]*

(c) ¿Cuál debería ser la cuota de entrada para que la pérdida del jugador en cada juego fuera de 34 centavos? *[2 puntos]*

(ii) (a) Demuestre mediante inducción matemática que

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z}^{+}.$$ *[6 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, compruebe que la suma de los primeros $(n+1)$ términos de la serie $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots$ es $\frac{(n+1)}{(2n+3)}$. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 10]*

(a) Escriba el término en x^r del desarrollo de $(x+h)^n$, donde $0 \le r \le n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[1 punto]*

(b) A partir de lo anterior, derive x^n, $n \in \mathbb{Z}^+$, aplicando la definición de derivada. *[5 puntos]*

(c) Comenzando del resultado $x^n \times x^{-n} = 1$, deduzca la derivada de x^{-n}, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

(i) Los números complejos z_1 y z_2 son $z_1 = 2 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 + \mathrm{i}$.

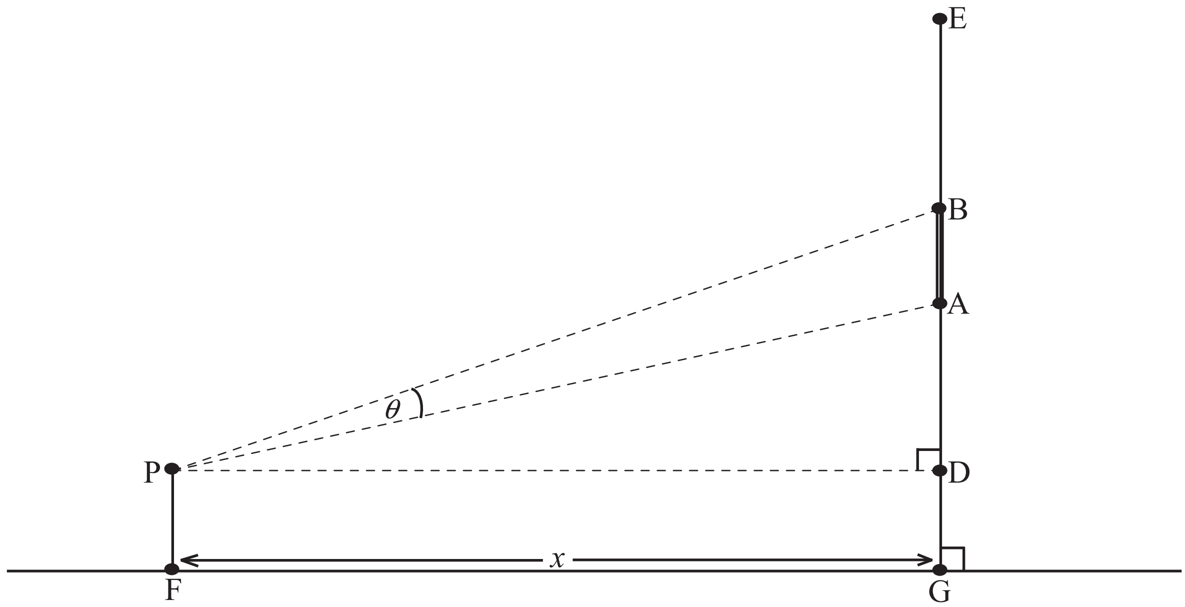
(a) Halle $z_1 z_2$; exprese su respuesta en la forma $a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$. *[1 punto]*

(b) La forma polar de z_1 se puede escribir $\left(\sqrt{5}, \arctan\frac{1}{2}\right)$.

(i) Exprese la forma polar de z_2, $z_1 z_2$ de modo similar.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$. *[5 puntos]*

(ii) Un hombre PF está de pie sobre un suelo horizontal en F, a una distancia x del fondo de un muro vertical GE. El hombre observa el cuadro AB en la pared. El ángulo BPA es θ.



Sea $\mathrm{DA} = a$, $\mathrm{DB} = b$, donde el ángulo PDE es un ángulo recto. Halle el valor de x para el cual $\tan\theta$ es un máximo; exprese su respuesta en función de a y b. Justifique que este valor de x da un valor máximo de $\tan\theta$. *[9 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sean X e Y dos variables independientes con $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{Var}(X)=3$, $\mathrm{E}(Y)=4$, $\mathrm{Var}(Y)=2$. Halle

(a) $\mathrm{E}(2X)$;

(b) $\mathrm{Var}(2X)$;

(c) $\mathrm{E}(3X-2Y)$;

(d) $\mathrm{Var}(3X-2Y)$. *[4 puntos]*

(ii) (a) Se obtienen dos muestras de una población normal cuya media μ y cuya varianza σ^2 se desconocen.

Los resultados de la primera muestra se dan en la siguiente tabla.

x	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5
Frecuencia	12	16	19	23	15

La segunda muestra de 72 objetos arroja los siguientes resultados

$$\sum x = 669{,}6 \text{ y } \sum x^2 = 6228.$$

Utilice las dos muestras para calcular un estimador de μ y de σ^2. *[7 puntos]*

(b) Basado en la combinación de los datos de las dos muestras, halle un intervalo de confianza del 95 % para μ. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continua en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) (a) De una población que está normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2, se extrae una muestra de tamaño n. Describa en detalle como está distribuida la media muestral. *[2 puntos]*

(b) Una tienda de maquinaria fabrica varillas de acero para ser utilizadas en una planta de producción de automóviles. A continuación se indican las longitudes, en metros, de una muestra de 8 varillas.

0,999; 1,001; 1,005; 1,011; 1,005; 1,001; 0,998; 1,004

Observaciones previas muestran que la programación de la máquina produce varillas cuyas longitudes están distribuidas normalmente con una desviación típica de 0,0028 m.

Indicando el tipo de prueba utilizado, determine al nivel de significación del 1 % si la media de la longitud de las varillas producidas es 1,005 m. *[7 puntos]*

(iv) Se lanza un dado de seis caras 300 veces y se recogen los resultados en las siguiente tabla.

Puntos	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	45	57	51	56	47	44

Realice una prueba adecuada al nivel de significación del 5 % para determinar si el dado está equilibrado. *[6 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Utilice diagramas de Venn para comprobar que

(a) $A \cup (B \cap A')' = A \cup B'$; *[2 puntos]*

(b) $\left((A \cap B)' \cup B\right)' = \varnothing$. *[2 puntos]*

(ii) Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Compruebe que $(M, +)$ no es un grupo. *[1 punto]*

(b) Compruebe que M forma un grupo abeliano bajo la multiplicación de matrices. (Puede suponer que la multiplicación de matrices es asociativa). *[5 puntos]*

(iii) El conjunto $S = \{a, b, c, d\}$ forma un grupo bajo las operaciones # y $*$, como se muestra en las siguientes tablas.

#	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

*	a	b	c	d
a	b			a
b		d		b
c				c
d	a	b		d

(a) Copie y complete la segunda tabla. *[4 puntos]*

(b) Resuelva las siguientes ecuaciones para x.

(i) $(b \# x) * c = d$.

(ii) $\left(a * (x \# b)\right) * c = b$. *[5 puntos]*

(iv) Sea $\max(|x|, |y|)$ igual al mayor de $|x|$ e $|y|$. Defina la relación R en el plano xy por

$$(a, b) R (p, q) \Leftrightarrow \max(|a|, |b|) = \max(|p|, |q|).$$

(a) Compruebe que la relación R es una relación de equivalencia. *[6 puntos]*

(b) (i) Halle las clases de equivalencia.

(ii) A partir de lo anterior, describa las clases de equivalencia. *[5 puntos]*

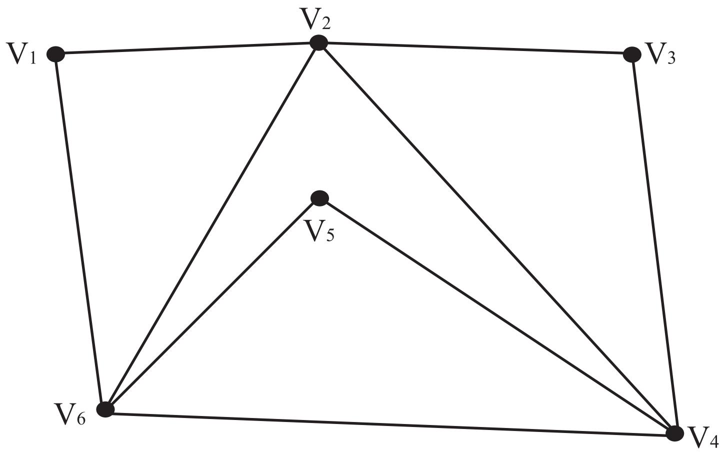
Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Utilice el algoritmo de Euclides para comprobar que 64 y 33 son primos relativos. *[3 puntos]*

(ii) Explique por qué $\mathbb{Z}$ no está bien ordenado. *[2 puntos]*

(iii) Considere el siguiente grafo.



(a) Compruebe que este grafo tiene

(i) un circuito euleriano;

(ii) un ciclo hamiltoniano. *[3 puntos]*

(b) Se quita la arista que une V_2 y V_6. ¿Sigue teniendo el grafo un circuito euleriano y un ciclo hamiltoniano? Explique las razones de su respuesta. *[3 puntos]*

(c) Vuelva a poner la arista que une V_2 y V_6 y quite la arista que une V_1 y V_2.

(i) Halle un sendero euleriano.

(ii) Halle un camino hamiltoniano. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continua en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iv) La secuencia de Fibonacci se define por la relación de recurrencia

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\text{, para } n \geq 2 \text{ y } u_0 = u_1 = 1\,.$$

(a) Escriba los ocho primeros términos de la secuencia. *[1 punto]*

(b) Resuelva la relación de recurrencia para obtener la fórmula

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\text{, para } n \geq 0\,.$$ *[8 puntos]*

(c) (i) A partir de lo anterior, compruebe que u_n también es igual al entero más cercano a $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

(ii) Dado que $u_n = 102\,334\,155$, halle el valor de *n*. *[6 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Enuncie el teorema del valor medio e ilústrelo con la ayuda de un dibujo aproximado. *[2 puntos]*

(b) Utilice el teorema del valor medio para demostrar que si $f'(x) = 0$ para todo x en un intervalo cerrado, entonces f es constante en ese intervalo. *[2 puntos]*

(ii) (a) Halle $\int_0^2 3x^5 \, dx$. *[1 punto]*

(b) Utilice la regla de Simpson con cuatro subintervalos para aproximar $\int_0^2 3x^5 \, dx$. *[4 puntos]*

(c) ¿Cuál es el error en esta aproximación? *[1 punto]*

(d) ¿Cuántos subintervalos son necesarios para que el error sea menos de 0,0001? *[5 puntos]*

(iii) (a) (i) Demuestre que la serie alternada dada por $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ converge.

(ii) Aproxime la serie mediante la 4ª suma parcial. Exprese su respuesta con **seis** decimales.

(iii) ¿Cuál es el límite superior del error en esta aproximación? *[7 puntos]*

(b) (i) Halle los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin del $\operatorname{sen} x$.

(ii) Deduzca el término enésimo de esta serie.

(iii) Utilice el criterio del cociente para comprobar que la serie es convergente para todos los valores de x.

(iv) Utilice su serie de $\operatorname{sen} x$ para hallar los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $\cos x$. *[8 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere el triángulo ABC, donde C es un ángulo recto. Sea D el punto sobre [AB] tal que (CD) es perpendicular a (AB).

(a) Compruebe que el triángulo ADC es similar al triángulo CDB. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, compruebe que $\mathrm{CD}^2 = \mathrm{AD} \times \mathrm{BD}$. *[2 puntos]*

(ii) Si S es el punto medio de la base [QR] de un triángulo PQR, demuestre el teorema de Apolonio

$$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2 = 2(\mathrm{PS}^2 + \mathrm{QS}^2).$$

[8 puntos]

(iii) (a) Una partícula se mueve en el plano xy de modo que $x = \frac{1}{2}t^3 - 6t$ e $y = \frac{1}{2}t^2$, donde t es el tiempo en segundos. Dibuje aproximadamente el camino de la partícula en el intervalo $0 \le t \le 4$. Indique claramente en el dibujo la dirección en que se mueve la partícula. *[5 puntos]*

(b) Compruebe que la ecuación de la tangente a la curva en $t = t_1$ puede expresarse en la forma $-4t_1 x + 6y(t_1^2 - 4) = t_1^4 + 12t_1^2$. *[7 puntos]*

(iv) La media armónica de p y de q está dada por $\dfrac{2pq}{p+q}$.

Los puntos C y D dividen la recta [AB] de modo que $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$, tal como se muestra en la siguiente figura.

Compruebe que AB es la media armónica de AC y AD. *[6 puntos]*