IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N05/5/MATHL/HP1/SPA/TZ0/XX

88057213

**MATEMÁTICAS**
**NIVEL SUPERIOR**
**PRUEBA 1**

Jueves 3 de noviembre de 2005 (tarde)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

| 0 | 0 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

*Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

**1.** En un triángulo ABC, $\mathrm{A\hat{B}C} = 31^\circ$, $\mathrm{AC} = 3\text{ cm}$ y $\mathrm{BC} = 5\text{ cm}$. Calcule las posibles longitudes del lado [AB].

*Operaciones:*

*Respuestas:*

**2.** Una muestra aleatoria de una gran población arroja los siguientes datos:

6,2 ; 7,8 ; 12,1 ; 9,7 ; 5,2 ; 14,8 ; 16,2 ; 3,7 .

Calcule la estimación insesgada de

(a) la media de la población;

(b) la varianza de la población.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) ____________________

(b) ____________________

**3.** Cuando el polinomio $P(x) = 4x^3 + px^2 + qx + 1$ se divide entre $(x-1)$, el resto es $-2$.
Cuando $P(x)$ se divide entre $(2x-1)$ el resto es $\frac{13}{4}$.
Halle el valor de $p$ y el valor de $q$.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

____________________

**4.** La curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ tiene un máximo local en el punto P y un mínimo local en el punto Q. Determine la ecuación de la recta que pasa por P y Q, exprésela en la forma $ax + by + c = 0$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

______________________

**5.** El triángulo OAB tiene vértices en los puntos $\text{O}(0, 0)$, $\text{A}\left(2, \sqrt{3}\right)$ y $\text{B}\left(\sqrt{3}, 2\right)$. Se rota el triángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes sobre el origen, de modo que la imagen de A es $\text{A}'$ y la imagen de B es $\text{B}'$. Halle el valor **exacto** de las coordenadas de

(a) $\text{A}'$;

(b) $\text{B}'$.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) ______________________

(b) ______________________

**6.** Los números complejos $z_1 = \dfrac{a}{1+i}$ y $z_2 = \dfrac{b}{1-2i}$ satisfacen la ecuación $z_1 + z_2 = 3$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule el valor de $a$ y el valor de $b$.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

**7.** Halle $\int e^x \cos x \, dx$.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**8.** Halle $\sum_{n=1}^{15} a_n^2$ donde $a_n = \ln x^n$.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**9.** Sea $f$ una función polinómica cúbica. Dado que $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$, $f(1) = f'(1)$ y $f''(-1) = 6$, halle $f(x)$.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**10.** La caja A contiene 6 bolas rojas y 2 bolas verdes. La caja B contiene 4 bolas rojas y 3 bolas verdes. Se tira un dado, perfectamente equilibrado, cuyos lados presentan los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Si se obtiene un número par, se selecciona una bola de la caja A; si se obtiene un número impar, se selecciona una bola de la caja B.

(a) Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada sea roja.

(b) Si la bola seleccionada es roja, calcule la probabilidad de que proceda de la caja B.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) ____________________

(b) ____________________

**11.** El paralelogramo ABCD tiene vértices $\mathrm{A}(3, 2, 0)$, $\mathrm{B}(7, -1, -1)$, $\mathrm{C}(10, -3, 0)$ y $\mathrm{D}(6, 0, 1)$. Calcule el área del paralelogramo.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

____________________

**12.** La variable aleatoria $X$ está normalmente distribuida con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Si $\mathrm{P}(X > 6,2) = 0,9474$ y $\mathrm{P}(X < 9,8) = 0,6368$, calcule el valor de $\mu$ y el valor de $\sigma$.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

**13.** Sean $f$ y $g$ dos funciones. Dado que $(f \circ g)(x) = \dfrac{x+1}{2}$ y $g(x) = 2x - 1$, halle $f(x-3)$.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

......................................................

**14.** Sea $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba la matriz inversa de $\boldsymbol{M}$.

(b) La recta $L_1$ se transforma en la recta $L_2$ mediante la matriz $\boldsymbol{M}$. La recta $L_2$ tiene como ecuación $y = 3x - 1$. Halle la ecuación de $L_1$.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) ......................................................

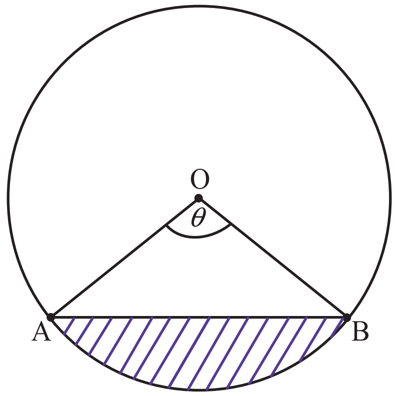
(b) ......................................................

**15.** Un círculo tiene por ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 1$. La recta de ecuación $y = kx$, donde $k \in \mathbb{R}$, es tangente al círculo. Halle todos los posibles valores de $k$.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

**16.** El siguiente diagrama muestra los puntos A y B en la circunferencia del círculo de centro O, y radio 4 cm, donde $\mathrm{A\hat{O}B} = \theta$. Los puntos A y B se desplazan en la circunferencia de modo que $\theta$ aumenta de manera proporcional.




Si la tasa de variación de la longitud del arco menor AB es numéricamente igual a la tasa de variación del área del segmento sombreado, halle el valor de $\theta$.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**17.** Dado que el valor máximo de $\dfrac{1}{4\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta + k}$ es 2, para $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$, halle el valor de *k*.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**18.** Hay 25 discos en una bolsa. Algunos son negros y el resto son blancos. Se seleccionan dos discos simultáneamente de forma aleatoria. Si la probabilidad de seleccionar dos discos del mismo color es la misma que la de seleccionar dos discos de color distinto, ¿cuántos discos negros hay en la bolsa?

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**19.** Halle el mayor conjunto de valores de $x$ de modo que la función $f$ dada por $f(x)=\sqrt{\dfrac{8x-4}{x-3}}$ tome valores reales.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

**20.** La recta $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$ se refleja en el plano $x+y+z=1$. Calcule el ángulo entre la recta y su imagen. Exprese su respuesta en **radianes**.

*Operaciones:*

*Respuesta:*