MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Miércoles 4 de mayo de 2005 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Sea $\boldsymbol{R}$ una rotación de k grados, de centro (0, 0). $\boldsymbol{R}$ aplica el punto (5, 10) en el punto (−2, 11). Halle la matriz $\boldsymbol{R}$. *[6 puntos]*

(b) La transformación $\boldsymbol{T}$ viene representada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Describa el efecto geométrico de aplicar la transformación $\boldsymbol{T}$ cuatro veces seguidas. *[2 puntos]*

(c) La matriz $\boldsymbol{Q}$ representa la rotación $\boldsymbol{R}$ seguida de la transformación $\boldsymbol{T}$. Compruebe que

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix}.$$ *[1 punto]*

(d) Encuentre, bajo la transformación $\boldsymbol{Q}$,

(i) el conjunto de puntos que se aplican en sí mismos;

(ii) la imagen de la recta $y = -x$. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 13]*

La función f está definida por $f(x) = e^{px}(x+1)$, con $p \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Compruebe que $f'(x) = e^{px}\left(p(x+1)+1\right)$.

(ii) Sea $f^{(n)}(x)$ la derivada $f(x)$ respecto de x, n veces. Demuestre por inducción matemática que

$$f^{(n)}(x) = p^{n-1}e^{px}\left(p(x+1)+n\right),\ n \in \mathbb{Z}^+.$$ *[7 puntos]*

(b) Cuando $p = \sqrt{3}$ la curva de f presenta un mínimo y un punto de inflexión. Halle el valor **exacto** de la abscisa, x, de

(i) el mínimo;

(ii) el punto de inflexión. *[4 puntos]*

(c) Sea $p = \frac{1}{2}$. Sea R la región encerrada por la curva, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Halle el área de R. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Sea π_1 el plano de ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Sea π_2 el plano de ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Compruebe que $\lambda = \mu$ para los puntos comunes a π_1 y π_2.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle una ecuación vectorial de la recta de intersección entre π_1 y π_2. *[5 puntos]*

(b) El plano π_3 contiene a la recta $\frac{2-x}{3} = \frac{y}{-4} = z+1$ y es perpendicular a $3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Halle la ecuación cartesiana de π_3. *[4 puntos]*

(c) Halle la intersección entre π_1, π_2 y π_3. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

Una empresa compra el 44 % de sus existencias de tornillos al fabricante A y el resto al fabricante B. El diámetro de los tornillos producidos por cada fabricante sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,16 mm.

El diámetro medio de los tornillos del fabricante A es de 1,56 mm.
El 24,2 % de los tornillos del fabricante B tiene un diámetro menor de 1,52 mm.

(a) Halle el diámetro medio de los tornillos producidos por el fabricante B. *[3 puntos]*

Se elige un tornillo al azar del stock de la empresa.

(b) Compruebe que la probabilidad de que el diámetro sea menor de 1,52 mm es 0,312, aproximando a tres cifras significativas. *[4 puntos]*

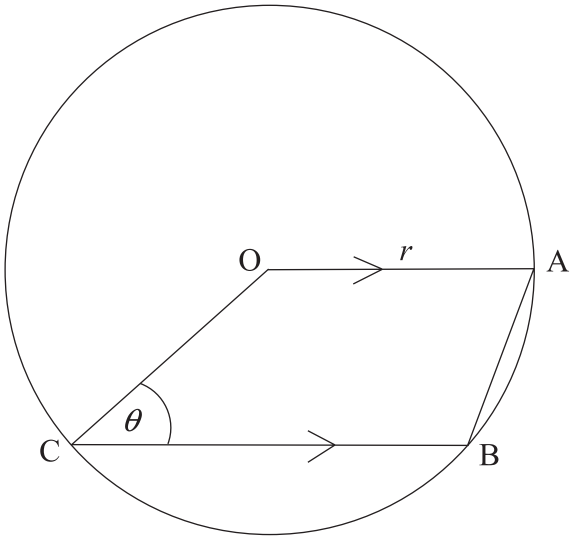
(c) El diámetro del tornillo ha resultado ser menor de 1,52 mm. Halle la probabilidad de que el tornillo sea del fabricante B. *[3 puntos]*

(d) El fabricante B produce 8000 tornillos al día. Obtiene un beneficio de $ 1,50 por cada tornillo vendido, a condición de que su diámetro mida entre 1,52 mm y 1,83 mm.
Los tornillos con diámetro menor de 1,52 mm se desechan con una pérdida de $ 0,85 por tornillo.
Los tornillos con diámetro mayor de 1,83 mm se venden con un beneficio reducido de $ 0,50 por tornillo.

Halle el beneficio esperado del fabricante B. *[6 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

La siguiente figura muestra un trapecio OABC donde OA es paralelo a CB. O es el centro de un círculo de radio r cm. A, B y C pertenecen a la circunferencia.
El ángulo $\text{OCB} = \theta$.



Sea T el área del trapecio OABC.

(a) Compruebe que $T = \dfrac{r^2}{2}(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta)$. *[4 puntos]*

Para un valor **fijo** de r, el valor de T cambia según cambia el valor de θ.

(b) Compruebe que T toma su valor máximo cuando θ satisface la ecuación $4\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$, y verifique que ese valor de T es un máximo. *[5 puntos]*

(c) Sabiendo que el perímetro del trapecio es 75 cm, halle el valor máximo de T. *[6 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea X una variable aleatoria con una distribución de Poisson, tal que $\mathrm{P}(X > 2) = 0,404$. Halle $\mathrm{P}(X < 2)$. *[4 puntos]*

(ii) Una urna contiene un gran número de bolas blancas y negras. Se afirma que dos tercios $\left(\frac{2}{3}\right)$ de las bolas son blancas. Para comprobar esta afirmación, se extraen de la urna cinco bolas al azar y se toma nota de la cantidad de bolas blancas. El experimento se repite 243 veces con los siguientes resultados:

Número de bolas blancas de la muestra	0	1	2	3	4	5
Número de veces que aparece esta muestra	8	9	52	78	70	26

¿Se puede aceptar esta afirmación con un nivel de significación del 5 %? *[8 puntos]*

(iii) Peter está criando dos hembras de pata de razas distintas, Ann y Bet. Utiliza una prueba para determinar si los huevos que pone cada pata tienen, de promedio, el mismo peso. Para ello ha pesado los últimos 12 huevos puestos por cada pata y ha obtenido los siguientes resultados, donde los pesos vienen expresados en gramos.

Ann	63,1	63,6	65,3	65,7	62,0	64,8	64,3	63,2	64,9	66,6	64,1	62,3
Bet	66,8	66,9	64,1	64,0	65,8	63,6	67,2	66,4	67,3	65,0	67,3	65,1

Se puede suponer que los pesos están normalmente distribuidos, con la misma desviación típica de 2 gramos.

(a) Escriba las hipótesis adecuadas para la prueba que se ha de realizar. *[1 punto]*

(b) (i) Calcule un estadístico pertinente para probar las hipótesis.

(ii) Utilizando un nivel de significación del 5 %, determine si los huevos que pone cada pata tienen el mismo peso medio. *[6 puntos]*

(c) Halle el máximo nivel de significación en el que se podría afirmar que no existe diferencia entre los pesos medios de los huevos que pone cada pata. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iv) La variable aleatoria X está normalmente distribuida con media μ. Se toma de X una muestra al azar de 12 observaciones, y se halla que

$$\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = 99.$$

(a) Determine un intervalo de confianza del 95 % para μ. *[5 puntos]*

(b) Se ha calculado otro intervalo de confianza [60,31; 65,69] para esta muestra. Halle el nivel de confianza de este intervalo. *[4 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Se define la operación # sobre los conjuntos A y B como $A \# B = A' \cup B'$.

Compruebe algebraicamente que

(a) $A \# A = A'$; *[1 punto]*

(b) $(A \# A) \# (B \# B) = A \cup B$; *[2 puntos]*

(c) $(A \# B) \# (A \# B) = A \cap B$. *[3 puntos]*

(ii) Sea $S = \{\text{enteros mayores que } 1\}$. Se define sobre S la relación R como

$$m \, R \, n \Leftrightarrow \text{mcd}(m, n) > 1, \text{ para } m, n \in S.$$

(a) Muestre que R es reflexiva. *[1 punto]*

(b) Muestre que R es simétrica. *[2 puntos]*

(c) Muestre, mediante un contraejemplo, que R no es transitiva. *[3 puntos]*

(iii) Sea $T = \{\text{todos los números reales excepto el } 1\}$. Se define sobre T la operación $*$ como

$$a * b = ab - a - b + 2, \text{ para } a, b \in T.$$

(a) Muestre que T es cerrado para la operación $*$. *[5 puntos]*

Ahora, asuma que T es un grupo para $*$.

(b) Halle el elemento neutro de T para $*$. *[3 puntos]*

(c) (i) Demuestre por inducción matemática que

$$\overbrace{a * a * \ldots * a}^{n \text{ veces}} = (a-1)^n + 1, \; n \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\text{(Note que } \overbrace{a * a * \cdots * a}^{5 \text{ veces}} = a * a * a * a * a \text{)}.$$

(ii) A partir de lo anterior, muestre que existe un único elemento en T, aparte del elemento neutro, que tiene orden finito. Halle ese elemento y su orden. *[10 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor, d, de 272 y 656. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, exprese d en la forma $272a + 656b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. *[3 puntos]*

(ii) Un grafo G tiene la siguiente matriz de adyacencia

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Dibuje el grafo G. *[2 puntos]*

(b) Explique por qué G tiene un circuito euleriano. Halle ese circuito. *[3 puntos]*

(c) Halle un camino hamiltoniano. *[1 punto]*

(iii) Los términos de la sucesión $\{u_n\}$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$u_{n+2} - 2\lambda u_{n+1} + \lambda^2 u_n = 0\text{, con } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Muestre que tanto $u_n = \lambda^n$ como $u_n = n\lambda^n$ satisfacen esta ecuación en diferencias. A partir de lo anterior, escriba la solución general de esta ecuación en diferencias. *[5 puntos]*

(b) Los términos de la sucesión $\{v_n\}$ satisfacen la ecuación

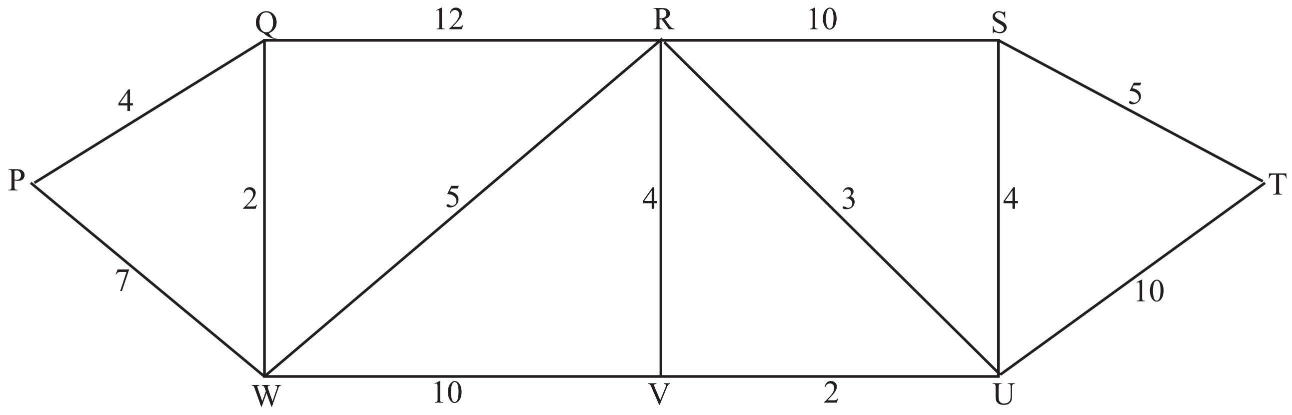
$$v_{n+2} - 6v_{n+1} + 9v_n = 0\text{, para } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } v_1 = 2, v_2 = 9.$$

Halle una expresión para v_n en función de n. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iv) El siguiente diagrama muestra un grafo ponderado.



Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar la longitud del camino más corto entre los vértices P y T. Muestre todos los pasos utilizados en el algoritmo y escriba el camino más corto. *[8 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sean $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, y $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ encuentre los primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para $e^{-x}\ln(1+x)$. *[6 puntos]*

(ii) Sea $I = \int_2^{3,2} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) dx$.

(a) Use la regla del trapecio con **seis** sub-intervalos para estimar el valor de *I*. *[4 puntos]*

(b) ¿Cuántos sub-intervalos son necesarios para que el error al estimar *I* sea menor que 10^{-5}? *[8 puntos]*

(iii) Sea $g(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos x$, para $1 \le x \le 1{,}5$.

Utilice el método de Newton-Raphson para hallar una aproximación de *a*, con error menor de 10^{-8}, tal que $g(a)$ sea un **máximo**. *[7 puntos]*

(iv) Encuentre el radio de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k$. *[5 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónica

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La recta $3x+y=12$ corta al eje y en P, al eje x en Q, a la recta $y-x=0$ en R y a la recta $y+x=0$ en S. Compruebe que P, Q, R, S dividen al segmento de recta [PS] en cuaterna armónica. *[9 puntos]*

(ii) La recta l tiene pendiente m y pasa por el punto (1, 0).

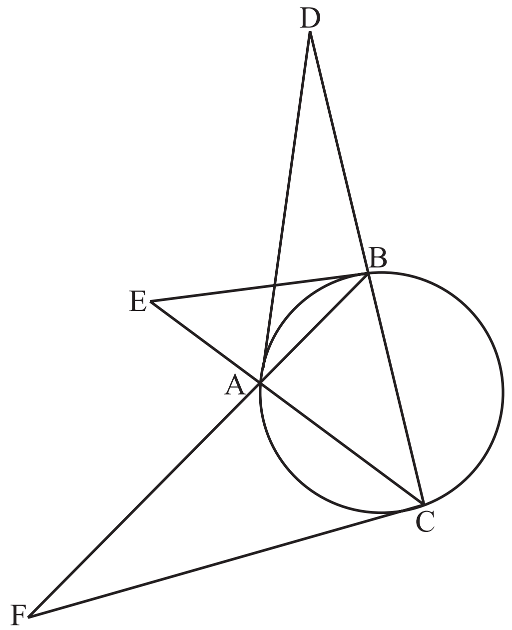
(a) Escriba la ecuación de l. *[1 punto]*

(b) Sea la parábola de ecuación $y^2=2x$. La recta l corta a esta parábola en U y en V. Sea W el punto medio de [UV].

(i) Muestre que las coordenadas de W son $\left(1+\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right)$.

(ii) Muestre que el lugar geométrico de W cuando m varía es una parábola. Halle las coordenadas de su foco y la ecuación de su directriz. *[10 puntos]*

(iii)



La figura muestra un triángulo ABC inscrito en una circunferencia. La tangente a la circunferencia en A corta a (BC) en D, la tangente en B corta a (CA) en E y la tangente en C corta a (AB) en F.

(a) Muestre que $\frac{\text{BD}}{\text{DC}}\times\frac{\text{CE}}{\text{EA}}\times\frac{\text{AF}}{\text{FB}}=-1$. *[9 puntos]*

(b) Establezca brevemente, justificándolo, qué conclusión se puede extraer de este resultado. *[1 punto]*