

22057213

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Martes 3 de mayo de 2005 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

0	0								
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.



Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Los vectores de posición de los puntos P y Q son $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ respectivamente. El origen está en O.
Halle

- (a) el ángulo POQ;
- (b) el área del triángulo OPQ.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____

2. Resuelva la ecuación $\left| e^{2x} - \frac{1}{x+2} \right| = 2$.

Operaciones:

Respuesta:



3. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X .

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,2	a	b	0,25

- (a) Sabiendo que $E(X) = 1,55$ halle el valor de a y de b .
- (b) Calcule $\text{Var}(X)$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____



4. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, halle X si $BX = A - AB$.

Operaciones:

Respuesta:

5. Considere los 10 datos x_1, x_2, \dots, x_{10} . Sabiendo que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1341$ y que la desviación típica es 6,9 halle el valor de \bar{x} .

Operaciones:

Respuesta:



6. La función f viene dada por $f(x) = \frac{x^5 + 2}{x}$, $x \neq 0$. La gráfica de f tiene un punto de inflexión en P.

Halle las coordenadas de P.

Operaciones:

Respuesta:



7. Sea $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, donde a, b , y $c \in \mathbb{R}$. Dos de las raíces de $P(z) = 0$ son -2 y $(-3 + 2i)$.
Halle el valor de a , de b y de c .

Operaciones:

Respuesta:

8. Se eligen al azar cinco estudiantes para formar un equipo que participe en un debate. Los estudiantes se eligen entre un grupo de ocho estudiantes de medicina y tres estudiantes de derecho. Halle la probabilidad de que
- (a) el equipo esté formado sólo por estudiantes de medicina;
 - (b) los tres estudiantes de derecho formen parte del equipo.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
(b) _____



9. La función densidad de probabilidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua X se define en el intervalo $[0, a]$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{para } 0 \leq x \leq 3, \\ \frac{27}{8x^2} & \text{para } 3 < x \leq a. \end{cases}$$

Calcule el valor de a .

Operaciones:

Respuesta:



10. Sabiendo que $a \sen 4x + b \sen 2x = 0$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, halle una expresión para $\cos^2 x$ en función de a y b .

Operaciones:

Respuesta:

11. Sabiendo que $|z| = 2\sqrt{5}$, halle el número complejo z que satisface la ecuación

$$\frac{25}{z} - \frac{15}{z^*} = 1 - 8i.$$

Operaciones:

Respuesta:



12. (a) Expresé $\frac{2x+4}{(x^2+4)(x-2)}$ en forma de suma de fracciones simples.

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle $\int \frac{2x+4}{(x^2+4)(x-2)} dx$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____



13. Se lleva a cabo un experimento donde el número n de bacterias en un líquido viene dado por la expresión $n = 650 e^{kt}$, donde t es el tiempo en minutos transcurrido desde el comienzo del experimento y k es una constante. El número de bacterias se duplica cada 20 minutos. Halle
- (a) el valor **exacto** de k ;
 - (b) la tasa de crecimiento del número de bacterias cuando $t = 90$.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

14. Sea $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 5}{x + 2}$, $x \neq -2$.

- (a) Halle $f'(x)$.
- (b) Resuelva $f'(x) > 2$.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____



15. La normal a la curva $y = \frac{k}{x} + \ln x^2$, para $x \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, en el punto $x = 2$, tiene por ecuación $3x + 2y = b$, donde $b \in \mathbb{R}$. Halle el valor **exacto** de k .

Operaciones:

Respuesta:



16. Sabiendo que $(A \cup B)' = \emptyset$, $P(A'|B) = \frac{1}{3}$ y $P(A) = \frac{6}{7}$, halle $P(B)$.

Operaciones:

Respuesta:

17. El triángulo ABC tiene un ángulo obtuso en B; $BC = 10,2$; $\hat{A} = x$ y $\hat{B} = 2x$.

(a) Halle AC, en función de $\cos x$.

(b) Sabiendo que el área del triángulo ABC es $52,02 \cos x$, halle el ángulo C.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____



18. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética $\{u_n\}$ viene dada por la expresión $S_n = 4n^2 - 2n$. Tres términos de esta progresión, u_2 , u_m y u_{32} , son términos consecutivos de una progresión geométrica. Halle m .

Operaciones:

Respuesta:



19. La función f está definida para $x > 2$ como $f(x) = \ln x + \ln(x - 2) - \ln(x^2 - 4)$.

(a) Exprese $f(x)$ en la forma $\ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$.

(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

Operaciones:

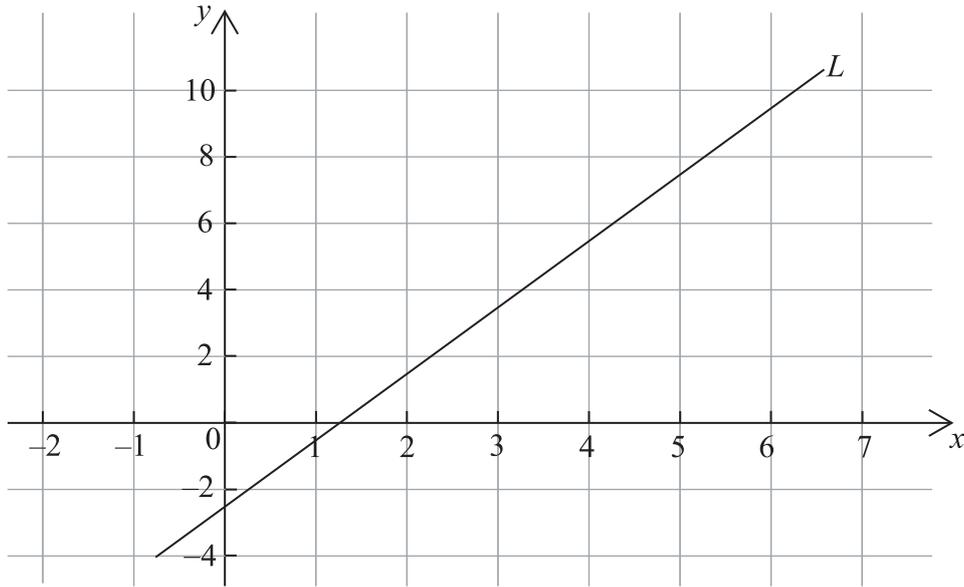
Respuestas:

(a) _____

(b) _____



20. Sea $y = \log_3 z$, donde z es una función de x . La siguiente figura muestra la recta L , que representa la gráfica de y en función de x .



- (a) Usando la gráfica, o de cualquier otro modo, estime el valor de x cuando $z = 9$.
- (b) La recta L pasa por el punto $\left(1, \log_3 \frac{5}{9}\right)$. Su pendiente es 2. Halle una expresión para z en función de x .

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

