IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N04/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX

88047414

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Jueves 4 de noviembre de 2004 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Indicar la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 11]*

Considere el número complejo $z = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(a) Utilizando el teorema de De Moivre, compruebe que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta .$$ *[2 puntos]*

(b) Mediante el desarrollo de $\left(z + \frac{1}{z}\right)^4$, compruebe que

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3).$$ *[4 puntos]*

(c) Sea $g(a) = \int_0^a \cos^4\theta \, \mathrm{d}\theta$.

(i) Halle $g(a)$.

(ii) Resuelva $g(a) = 1$. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

La ecuación de una recta l_1 es $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-9}{-2}$.

(a) Sea M un punto de l_1 con parámetro μ. Exprese las coordenadas de M en función de μ. *[1 punto]*

(b) La recta l_2 es paralela a l_1 y pasa por $\mathrm{P}(4, 0, -3)$.

(i) Escriba una ecuación para l_2.

(ii) Exprese $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ en función de μ. *[4 puntos]*

(c) El vector $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ es perpendicular a l_1.

(i) Halle el valor de μ.

(ii) Halle la distancia entre l_1 y l_2. *[5 puntos]*

(d) El plano π_1 contiene a l_1 y a l_2. Halle una ecuación de π_1, expresando la respuesta en la forma $Ax+By+Cz=D$. *[4 puntos]*

(e) El plano π_2 tiene por ecuación $x-5y-z=-11$. Compruebe que l_1 es la recta de intersección de los planos π_1 y π_2. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Sea $\boldsymbol{T}_1$ una rotación con centro en el origen y ángulo A, y $\boldsymbol{T}_2$ una rotación con centro en el origen y ángulo B. Considere las matrices $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, y el producto $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$, para demostrar que

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A\cos B + \cos A \operatorname{sen} B\,,$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B\,.$$

[4 puntos]

(b) A partir de lo anterior, demuestre que $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$. *[5 puntos]*

(c) La matriz $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{-5}{13} \end{pmatrix}$ representa una simetría respecto a una recta que pasa por el origen. Utilizando el resultado del **apartado (b)**, halle la ecuación de esta recta. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

Ian y Karl han sido elegidos para representar a sus países en la categoría olímpica de lanzamiento de disco. Se supone que la distancia conseguida por los atletas en el lanzamiento está normalmente distribuida. La distancia media conseguida por Ian el año pasado fue 60,33 m, con una desviación típica de 1,95 m.

(a) El año pasado, el 80 % de los lanzamientos de Ian superaron los x metros. Halle x, aproximando el resultado a **dos** cifras decimales. *[3 puntos]*

(b) El año pasado, el 80 % de los lanzamientos de Karl superaron los 56,52 m. Si la distancia media de sus lanzamientos fue 59,39 m, halle la desviación típica de sus lanzamientos, aproximando el resultado a **dos** cifras decimales. *[3 puntos]*

(c) Este año, los lanzamientos de Karl tienen una media de 59,50 m y una desviación típica de 3,00 m. Los lanzamientos de Ian siguen teniendo una media de 60,33 m y una desviación típica de 1,95 m. En la competición, un atleta ha de tener al menos un lanzamiento de 65 m o más en la primera vuelta para poder clasificarse para la final. Se permiten tres lanzamientos a cada atleta en la primera vuelta.

(i) Determine cuál de los dos atletas tiene más posibilidades de clasificarse para la final en su primer lanzamiento.

(ii) Halle la probabilidad de que **los dos** atletas se clasifiquen para la final. *[11 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 11]*

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{y}{(\mathrm{e}^{2\theta} + 1)}$.

(a) Utilice la sustitución $x = \mathrm{e}^{\theta}$ para comprobar que

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2 + 1)}.$$

[3 puntos]

(b) Halle $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2 + 1)}$. *[4 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, halle y en función de θ, si $y = \sqrt{2}$ cuando $\theta = 0$. *[4 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea X una variable aleatoria con una distribución de Poisson tal que $\mathrm{Var}(X) = \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 - 6$.

(a) Compruebe que la media de la distribución es 3. *[3 puntos]*

(b) Halle $\mathrm{P}(X \le 3)$. *[1 punto]*

Sea Y otra variable aleatoria, independiente de X, con una distribución de Poisson tal que $\mathrm{E}(Y) = 2$.

(c) Halle $\mathrm{P}(X + Y < 4)$. *[2 puntos]*

(d) Sea $U = X + 2Y$.

(i) Halle la media y la varianza de U.

(ii) Indique y explique mediante un razonamiento si U tiene o no una distribución de Poisson. *[4 puntos]*

(ii) Un granjero que cría gallinas quiere hallar un intervalo de confianza para el peso promedio de sus gallinas. Para ello selecciona n gallinas al azar y las pesa. Basado en sus resultados, obtiene el siguiente intervalo con 95 % de confianza:

[2148 gramos , 2188 gramos].

Se sabe que los pesos de las gallinas tienen una distribución normal con una desviación típica de 100 gramos.

(a) Halle el valor de n. *[5 puntos]*

(b) Suponiendo que se ha obtenido el mismo intervalo de confianza pesando 166 gallinas, ¿cuál sería el nivel de confianza? *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) La variable aleatoria Z tiene una función densidad de probabilidad $f(z) = z - \frac{z^3}{4}$ para $z \in [0, 2]$ y 0 en el resto. Un físico supone que la vida media de una cierta partícula puede seguir el modelo dado por esta variable aleatoria. El intervalo $[0, 2]$ se divide en los siguientes intervalos de la misma amplitud:

$$I_1 = [0,\ 0{,}4[$$
$$I_2 = [0{,}4,\ 0{,}8[$$
$$I_3 = [0{,}8,\ 1{,}2[$$
$$I_4 = [1{,}2,\ 1{,}6[$$
$$I_5 = [1{,}6,\ 2]$$

El físico lleva a cabo 40 experimentos y registra el número de veces que el valor de Z se encuentra dentro de cada uno de los intervalos I_k donde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ según se muestra en la siguiente tabla:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
2	12	9	8	9

(a) Suponiendo que la suposición del físico es correcta, halle $p_k = \mathrm{P}(Z \in I_k)$ para cada valor de k. *[4 puntos]*

(b) ¿Se puede aceptar la suposición del físico con un nivel de significación del 5 %? *[8 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La relación R sobre $\mathbb{C}$ está definida como sigue

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ para } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}$. *[3 puntos]*

(b) Describa las clases de equivalencia determinadas por la relación R. *[2 puntos]*

(ii) Considere el conjunto $S = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ sobre el cual se define la operación $*$ como producto módulo 13.

(a) Escriba la tabla de la operación de S a través de $*$. *[4 puntos]*

(b) Suponiendo que producto módulo 13 es asociativa, muestre que $(S, *)$ es un grupo conmutativo. *[4 puntos]*

(c) Indique el orden de cada elemento. *[3 puntos]*

(d) Halle todos los subgrupos de $(S, *)$. *[3 puntos]*

(iii) Sea $(H, \times)$ un grupo, y sea a uno de sus elementos tal que $a \times a = a$. Compruebe que a tiene que ser el elemento neutro del grupo. *[4 puntos]*

(iv) (a) Explique qué se entiende por grupo cíclico. *[2 puntos]*

Sea $(G, \#)$ un grupo finito cuyo orden p es un número primo.

(b) Compruebe que $(G, \#)$ es cíclico. *[5 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea G un grafo ponderado con 6 vértices L, M, N, P, Q, y R. Los pesos de las aristas que unen los vértices vienen dados en la siguiente tabla:

	L	M	N	P	Q	R
L	–	4	3	5	1	4
M	4	–	4	3	2	7
N	3	4	–	2	4	3
P	5	3	2	–	3	4
Q	1	2	4	3	–	5
R	4	7	3	4	5	–

Por ejemplo, el peso de la arista que une los vértices L y N es 3.

(a) Utilice el algoritmo de Prim para dibujar un árbol generador minimal que comience en M. *[5 puntos]*

(b) ¿Cuál es el peso total del árbol? *[1 punto]*

(ii) Sean G_1 y G_2 dos grafos que tienen las siguientes matrices de adyacencia.

G_1

	A	B	C	D	E	F
A	0	2	0	2	0	0
B	2	0	1	1	0	1
C	0	1	0	1	2	1
D	2	1	1	0	2	0
E	0	0	2	2	0	2
F	0	1	1	0	2	0

G_2

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	3	0	1	2
b	1	0	1	3	2	0
c	3	1	0	2	1	3
d	0	3	2	0	2	0
e	1	2	1	2	0	1
f	2	0	3	0	1	0

(a) ¿Cuál de ellos no tiene un sendero euleriano? Razone la respuesta. *[2 puntos]*

(b) Halle un sendero euleriano en el otro grafo. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) Sea $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$ una ecuación en diferencias para todos los enteros positivos n.

(a) Muestre que $1+i$ y $1-i$ son raíces de la ecuación característica. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, escriba la solución general para la ecuación en diferencias. *[1 punto]*

(c) Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, muestre que $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}$. *[8 puntos]*

(iv) Sean p, q y $r \in \mathbb{Z}^+$ con p y q primos entre sí.

Compruebe que $r \equiv p \pmod{q}$ **y** $r \equiv q \pmod{p}$ si y sólo si $r \equiv p + q \pmod{pq}$. *[7 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Halle todos los valores de x para los cuales la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$ *[7 puntos]*

(ii) Sea f una función definida en el intervalo $\left[1, \frac{4}{3}\right]$ por $f(x) = \frac{(2+3x-x^3)}{3}$.

(a) Compruebe que el recorrido de f es un subconjunto de su dominio. *[5 puntos]*

(b) Halle el valor exacto de a tal que $f(a) = a$. *[1 punto]*

La sucesión $\{x_n\}, n = 0, 1, 2, \ldots$ se define como sigue

$$x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n).$$

(c) Utilizando el teorema del valor medio, o de cualquier otro modo, compruebe que $|x_{n+1} - a| \le \frac{7|x_n - a|}{9}$ para cualquier valor de n. *[5 puntos]*

(d) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, compruebe que la sucesión $\{x_n\}$ converge a a. *[4 puntos]*

(iii) (a) Compruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n^2}$ es convergente. *[3 puntos]*

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n^2}$.

(b) Compruebe que para los enteros positivos $n \ge 2$,

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$ *[1 punto]*

(c) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, compruebe que $1 \le S < 2\pi$. *[4 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La ecuación de una parábola es $4py = x^2$, donde $p > 0$.

(a) Halle los números reales a y b tales que, para todos los puntos P de la parábola, la distancia de P al punto $\mathrm{A}(0, a)$ es igual a la distancia de P a la recta $y = b$. *[6 puntos]*

(b) Compruebe que en cada punto P de la parábola, la tangente a la parábola es la bisectriz del ángulo formado por (AP) y la recta paralela al eje y que pasa por P. *[6 puntos]*

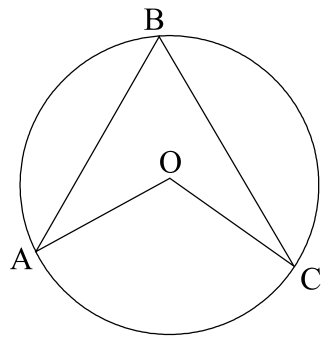
(ii) En el triángulo ABC, sea D el punto de intersección de la recta (AC) con la bisectriz del ángulo ABC.

Demuestre el Teorema de la bisectriz, que es $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

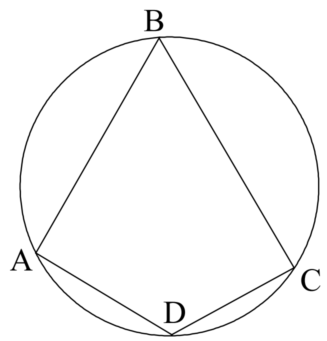
(Pregunta 10: continuación)

(iii) Sean A, B y C tres puntos de una circunferencia de centro O, de tal modo que B está situado sobre el arco más largo que une A con C, como se muestra en la figura.



(a) Compruebe que el ángulo AOC es el doble del ángulo ABC. *[4 puntos]*

Sea D otro punto sobre el arco CA según se muestra continuación.



(b) Utilizando el apartado (a), o de cualquier otro modo, compruebe que la suma de dos ángulos opuestos cualesquiera del cuadrilátero es igual a $180°$. *[3 puntos]*

(iv) Sean M y N dos puntos cualesquiera de una circunferencia de centro O, y sea R otro punto de la circunferencia equidistante de M y N.

Compruebe que (NR) es la bisectriz del ángulo formado por (MN) y la tangente a la circunferencia en N. *[7 puntos]*