MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Viernes 7 de mayo de 2004 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 13]*

(a) Los puntos $\mathrm{A}(1, 2)$ y $\mathrm{B}(4, 5)$ se aplican en $\mathrm{A}'(2, 3)$ y $\mathrm{B}'(5, 6)$ respectivamente, mediante una transformación lineal ***M***.

(i) Halle la matriz ***M*** que representa esta transformación.

(ii) Halle la imagen de A' mediante ***M***. *[7 puntos]*

El punto $\mathrm{C}(1, 3)$ se aplica en $\mathrm{C}'(2, 2)$ mediante una traslación ***T***.

(b) Halle el vector que representa ***T***. *[2 puntos]*

(c) Halle la imagen de $\mathrm{D}(5, 7)$ mediante las siguientes transformaciones.

(i) ***T*** seguida de ***M***;

(ii) ***M*** seguida de ***T***. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) Jack y Jill juegan a un juego que consiste en tirar un dado por turnos. Si sale un 1, 2, 3 ó 4, el jugador que tiró el dado gana el juego. Si sale un 5 ó un 6 le toca el turno al otro jugador. Jack empieza a jugar y el juego continúa hasta que alguien gane.

(a) Escriba la probabilidad de que Jack gane en su primera tirada. *[1 punto]*

(b) Calcule la probabilidad de que Jill gane en su primera tirada. *[2 puntos]*

(c) Calcule la probabilidad de que Jack gane el juego. *[3 puntos]*

(ii) Sea $f(x)$ la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X, donde

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{para } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) Compruebe que $k = \frac{3}{8}$. *[2 puntos]*

(b) Calcule

(i) $\mathrm{E}(X)$;

(ii) la mediana de X. *[6 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Considere dos vectores unitarios $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en un espacio tridimensional. Demuestre que el vector $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ biseca al ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. *[4 puntos]*

Considere los puntos $\mathrm{A}(2, 5, 4)$, $\mathrm{B}(1, 3, 2)$ y $\mathrm{C}(5, 5, 6)$. La recta l pasa por B y biseca al ángulo ABC.

(b) Halle la ecuación de l. *[4 puntos]*

(c) La recta l corta a (AC) en el punto D. Halle las coordenadas de D. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 10]*

Sea $f(x) = x\cos x$, para $0 \le x \le \pi$. La curva de $f(x)$ tiene un máximo local en $x = a$ y un punto de inflexión en $x = b$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$ indicando las posiciones aproximadas de a y b. *[2 puntos]*

(b) Halle el valor de

(i) a;

(ii) b. *[3 puntos]*

(c) Utilizando la integración por partes halle una expresión para $\int x\cos x \, dx$. *[3 puntos]*

(d) A partir de lo anterior halle el valor **exacto** del área encerrada por la curva y el eje x, para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) Compruebe que $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$. *[2 puntos]*

(b) Sea $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ donde x es un número real, $x \in [-1, 1]$ y n es un entero positivo.

(i) Halle $T_1(x)$.

(ii) Compruebe que $T_2(x) = 2x^2 - 1$. *[5 puntos]*

(c) (i) Utilice el resultado del apartado (a) para comprobar que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, demuestre por inducción que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n. *[12 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Charles sabe por experiencia que el número de cartas que el cartero lleva a su casa cada día sigue una distribución de Poisson de media 3.

(a) Halle la probabilidad de que el cartero lleve dos cartas un día elegido al azar. *[2 puntos]*

(b) Otro día, Charles ve que el cartero se acerca a su casa, por lo que sabe que está a punto de recibir correo. Calcule la probabilidad de que reciba dos cartas ese día. *[3 puntos]*

(ii) A continuación aparece una muestra al azar de 16 observaciones de una distribución normal de media μ.

16,9	15,0	15,8	18,7	20,9	19,9	18,6	22,1
16,5	18,8	16,4	17,7	16,1	17,2	20,6	19,8

Calcule un intervalo de confianza del 95 % para μ. *[6 puntos]*

(iii) Se tiran simultáneamente siete monedas 320 veces. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Número de caras obtenidas	Frecuencia
1	12
2	43
3	79
4	86
5	65
6	29
7	6

La hipótesis nula H_0 es “seis de las monedas son correctas y la otra tiene dos caras”.

(a) Enuncie, con palabras, la hipótesis alternativa H_1. *[2 puntos]*

(b) Determine, con un nivel de significación del $5\,\%$, si el análisis de los datos anteriores nos lleva a aceptar o rechazar H_0. *[7 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iv) Se ha medido la altura, en cm, de hombres y mujeres de una muestra al azar con los siguientes resultados.

Altura de los hombres (cm)	183 171 167 169 175 181 179 171 165
Altura de las mujeres (cm)	152 169 156 163 158 161 160 162

Se cree que la altura media de los hombres excede a la altura media de las mujeres en más de 10 cm. Utilice un contraste de una cola al nivel de significación del 10 % para investigar si esto es cierto. Puede asumir que las alturas de los hombres y de las mujeres tienen una distribución normal con la misma varianza. *[10 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La relación R está definida sobre los puntos $\mathrm{P}(x, y)$ del plano por

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \text{ si y sólo si } x_1 + y_2 = x_2 + y_1 .$$

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[4 puntos]*

(b) Dé una descripción geométrica de las clases de equivalencia. *[2 puntos]*

(ii) La operación binaria $*$ está definida para $x, y \in \mathbb{R}$ por

$$x * y = xy - x - y + 2 .$$

(a) Halle el elemento neutro de $*$. *[2 puntos]*

(b) Halle el simétrico de 3 para $*$. *[2 puntos]*

(c) (i) Compruebe que

$$(x * y) * z = xyz - yz - zx - xy + x + y + z .$$

(ii) Determine si $*$ es asociativa o no. *[6 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) Considere el conjunto $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ con la operación $\otimes$, multiplicación módulo 16.

(a) Calcule

(i) $3 \otimes 5$;

(ii) $3 \otimes 7$;

(iii) $9 \otimes 11$. *[3 puntos]*

(b) (i) Copie y complete la tabla de la operación $\otimes$ en S.

$\otimes$	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**
1	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	9				1	7	13
5	5			3	13	7	1	11
7	7		3		15	13	11	9
9	9		13	15	1		5	7
11	11	1	7	13			15	5
13	13	7	1	11	5	15	9	3
15	15	13	11	9	7	5	3	1

(ii) Considerando que $\otimes$ es asociativa, compruebe que $(S, \otimes)$ es un grupo. *[5 puntos]*

(c) Halle todos los elementos de orden

(i) 2;

(ii) 4. *[4 puntos]*

(d) Halle un subgrupo cíclico de orden 4. *[2 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Halle la solución general de la ecuación en diferencias,

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 28x_n,\ x_0 = 7,\ x_1 = -6, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$ *[5 puntos]*

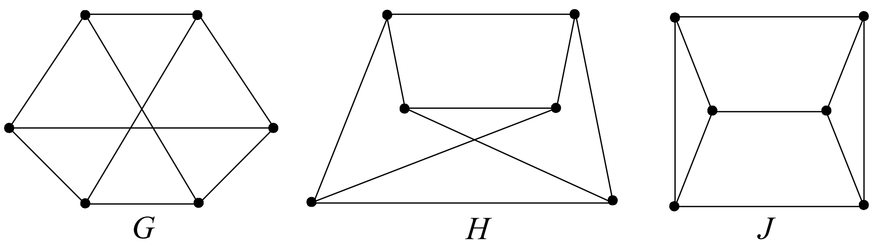
(ii) (a) Defina los siguientes términos.

(i) Grafo bipartido.

(ii) Isomorfismo entre dos grafos, *M* y *N*. *[4 puntos]*

(b) Demuestre que un isomorfismo entre dos grafos aplica un ciclo de un grafo en un ciclo del otro grafo. *[3 puntos]*

(c) A continuación aparecen dibujados los grafos *G*, *H* y *J*.



(i) Determine, dando una razón, si *G* es o no un grafo bipartido.

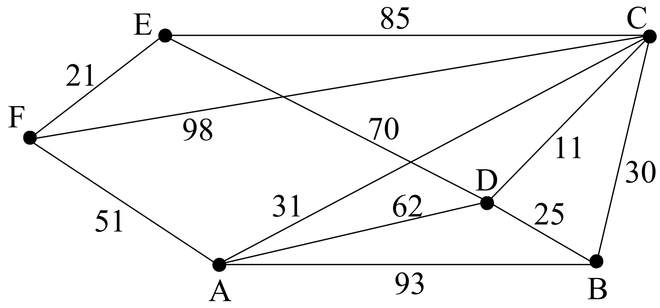
(ii) Determine, dando una razón, si existe o no un isomorfismo entre los grafos *G* y *H*.

(iii) Utilizando el resultado del apartado (b), o de cualquier otro modo, determine si el grafo *H* es o no isomorfo al grafo *J*. *[7 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) El siguiente diagrama muestra un grafo ponderado.



(a) Use el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol generador minimal del grafo. *[4 puntos]*

(b) Dibuje el árbol generador minimal y halle su peso. *[2 puntos]*

(iv) (a) Enuncie el principio de la buena ordenación. *[2 puntos]*

(b) Utilice el principio de la buena ordenación para demostrar que, dados dos enteros positivos cualesquiera a y b, $(a < b)$, existe un entero positivo n tal que $na > b$. *[3 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Determine si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{2k}\right]$$ *[5 puntos]*

(ii) Sea $f : x \mapsto \operatorname{sen} x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Sea A el área encerrada por la gráfica de f, el eje x y la recta $x = \frac{\pi}{2}$.
Halle el valor de A. *[2 puntos]*

(b) Utilizando el método de Simpson, halle una aproximación de A con un error menor que 10^{-4}. *[6 puntos]*

(c) Compruebe que el error es menor que 10^{-4}. *[1 punto]*

(iii) (a) Utilice el teorema del valor medio para demostrar que, para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x \le x$. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, demuestre que para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x \ge x - \frac{x^3}{6}$. *[4 puntos]*

(iv) Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$.

(a) Muestre que, para $m \in \mathbb{Z}^+$, $S_{4m} = 0$. *[7 puntos]*

(b) Muestre que $S_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. *[2 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, muestre que la serie converge cuando $n \to \infty$, y halle el límite. *[1 punto]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) El foco de la parábola C es el punto $\mathrm{F}(a, b)$ y la ecuación de la directriz es $x = -a$.

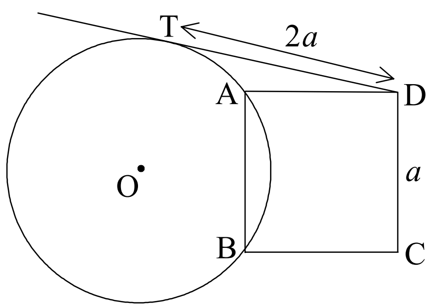
(a) (i) Halle la ecuación de C a partir de la definición.

(ii) Dibuje aproximadamente C, marcando el foco, la directriz, el eje de simetría y el vértice. *[6 puntos]*

(b) El punto P de abscisa $\frac{3a}{2}$ pertenece a la mitad superior de C. La tangente a C en el punto P corta al eje de simetría de C en el punto Q. La recta que pasa por el vértice V de C y es perpendicular a la tangente (PQ) corta a (PQ) en el punto R. Demuestre que $\mathrm{PR} : \mathrm{RQ} = 7 : 3$. *[12 puntos]*

(c) La recta que pasa por F y es paralela a (VR) corta a la recta (PQ) en el punto S. Halle las coordenadas de S. *[4 puntos]*

(ii) El siguiente diagrama muestra un cuadrado ABCD de lado a. Un círculo de centro O y radio r pasa por los vértices A y B. La longitud de la tangente al círculo desde D, es $2a$.



Halle una expresión para r en función de a. *[8 puntos]*