MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Vendredi 7 mai 2004 (matin)

3 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

SECTION A

Répondez aux ***cinq*** *questions de cette section.*

1. *[Note maximum : 13]*

(a) Les points $\mathrm{A}(1;2)$ et $\mathrm{B}(4;5)$ ont respectivement pour image $\mathrm{A}'(2;3)$ et $\mathrm{B}'(5;6)$ par la transformation linéaire $\boldsymbol{M}$.

(i) Trouvez la matrice $\boldsymbol{M}$ qui représente cette transformation.

(ii) Trouvez l'image de A' par $\boldsymbol{M}$. *[7 points]*

Le point $\mathrm{C}(1;3)$ a pour image $\mathrm{C}'(2;2)$ par une translation $\boldsymbol{T}$.

(b) Trouvez le vecteur qui représente $\boldsymbol{T}$. *[2 points]*

(c) Trouvez l'image de $\mathrm{D}(5;7)$ par les transformations suivantes.

(i) $\boldsymbol{T}$ suivie de $\boldsymbol{M}$;

(ii) $\boldsymbol{M}$ suivie de $\boldsymbol{T}$. *[4 points]*

2. *[Note maximum : 14]*

(i) Jack et Jill jouent ensemble, en lançant un dé à tour de rôle. Si le dé tombe sur 1, 2, 3 ou 4, le joueur qui a lancé le dé gagne le jeu. Si le dé tombe sur 5 ou 6, c'est à l'autre joueur de lancer le dé. Jack joue en premier et le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

(a) Écrivez la probabilité que Jack gagne avec son premier lancer. *[1 point]*

(b) Calculez la probabilité que Jill gagne avec son premier lancer. *[2 points]*

(c) Calculez la probabilité que Jack gagne le jeu. *[3 points]*

(ii) Soit $f(x)$ la fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire X, telle que

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(a) Montrez que $k = \dfrac{3}{8}$. *[2 points]*

(b) Calculez

(i) $\mathrm{E}(X)$;

(ii) la médiane de X. *[6 points]*

3. *[Note maximum : 14]*

(a) On considère deux vecteurs unités $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans un espace de dimension trois. Démontrez que le vecteur $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ est une bissectrice de l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. *[4 points]*

On considère les points $\mathrm{A}(2; 5; 4)$, $\mathrm{B}(1; 3; 2)$ et $\mathrm{C}(5; 5; 6)$. La droite l passe par B et est une bissectrice de l'angle ABC.

(b) Trouvez une équation de l. *[4 points]*

(c) La droite l rencontre (AC) au point D. Trouvez les coordonnées de D. *[6 points]*

4. *[Note maximum : 10]*

Soit $f(x) = x\cos x$, avec $0 \leq x \leq \pi$. La courbe représentant $f(x)$ présente un maximum local en $x = a$ et un point d'inflexion en $x = b$.

(a) Faites un croquis de la courbe représentative de $f(x)$ en précisant les positions approximatives de a et b. *[2 points]*

(b) Trouvez la valeur de

(i) a ;

(ii) b. *[3 points]*

(c) En utilisant une intégration par parties trouvez une expression de $\int x\cos x \, \mathrm{d}x$. *[3 points]*

(d) À partir de là, trouvez la valeur **exacte** de l'aire limitée par la courbe et l'axe des abscisses Ox, avec $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. *[2 points]*

5. *[Note maximum : 19]*

(a) Montrez que $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$. *[2 points]*

(b) Soit $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ où x est un nombre réel tel que $x \in [-1, 1]$ et n un nombre entier positif.

(i) Trouvez $T_1(x)$.

(ii) Montrez que $T_2(x) = 2x^2 - 1$. *[5 points]*

(c) (i) En utilisant le résultat de la partie (a), montrez que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, démontrez par récurrence que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n. *[12 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Statistiques

6. *[Note maximum : 30]*

(i) Charles sait par expérience que le nombre de lettres que le facteur distribue dans sa maison chaque jour suit une distribution de Poisson de moyenne 3.

(a) Trouvez la probabilité pour qu'un certain jour choisi au hasard, deux lettres soient distribuées. *[2 points]*

(b) Un autre jour, Charles voit le postier qui s'approche de sa maison et il sait donc qu'il va recevoir du courrier. Calculez la probabilité pour qu'il reçoive deux lettres ce jour-là. *[3 points]*

(ii) Ci-dessous se trouve un échantillon aléatoire de 16 observations d'une distribution normale de moyenne μ.

16,9	15,0	15,8	18,7	20,9	19,9	18,6	22,1
16,5	18,8	16,4	17,7	16,1	17,2	20,6	19,8

Calculez un intervalle de confiance à 95 % pour μ. *[6 points]*

(iii) Sept pièces sont jetées simultanément 320 fois. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Nombre de "faces" obtenues	Effectifs
1	12
2	43
3	79
4	86
5	65
6	29
7	6

L'hypothèse nulle H_0 est "six des pièces sont équilibrées et la dernière a deux côtés face".

(a) Formulez, en une phrase, la contre-hypothèse H_1. *[2 points]*

(b) Déterminez, au seuil de signification de 5%, si l'analyse des données ci-dessus conduit à l'acceptation ou au rejet de H_0. *[7 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iv) On a mesuré les tailles, en cm, des hommes et des femmes d'un échantillon pris au hasard. Voici les résultats.

Taille des hommes (cm)	183	171	167	169	175	181	179	171	165
Taille des femmes (cm)	152	169	156	163	158	161	160	162	

On pense que la taille moyenne des hommes dépasse la taille moyenne des femmes de plus de 10 cm. Utilisez un test unilatéral au niveau de signification de $10\,\%$ pour étudier si ceci est vrai. Vous admettrez que les tailles des hommes et celles des femmes sont normalement distribuées avec la même variance. *[10 points]*

Ensembles, relations et groupes

7. *[Note maximum : 30]*

(i) La relation R est définie sur les points $\mathrm{P}(x\,;\,y)$ du plan par

$$(x_1\,;\,y_1)\,R\,(x_2\,;\,y_2) \text{ si et seulement si } x_1 + y_2 = x_2 + y_1 .$$

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence. *[4 points]*

(b) Donnez une description géométrique des classes d'équivalence. *[2 points]*

(ii) L'opération binaire $*$ est définie pour $x, y \in \mathbb{R}$ par

$$x * y = xy - x - y + 2 .$$

(a) Trouvez l'élément neutre de $*$. *[2 points]*

(b) Trouvez le symétrique de 3 pour $*$. *[2 points]*

(c) (i) Montrez que

$$(x * y) * z = xyz - yz - zx - xy + x + y + z .$$

(ii) Déterminez si $*$ est ou n'est pas associative. *[6 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(iii) On considère l'ensemble $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ avec l'opération $\otimes$, la multiplication modulo 16.

(a) Calculez

(i) $3 \otimes 5$;

(ii) $3 \otimes 7$;

(iii) $9 \otimes 11$. *[3 points]*

(b) (i) Recopiez et complétez la table d'opération de $\otimes$ pour S.

$\otimes$	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**
1	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	9				1	7	13
5	5			3	13	7	1	11
7	7		3		15	13	11	9
9	9		13	15	1		5	7
11	11	1	7	13			15	5
13	13	7	1	11	5	15	9	3
15	15	13	11	9	7	5	3	1

(ii) En admettant que $\otimes$ est associative, montrez que $(S, \otimes)$ est un groupe. *[5 points]*

(c) Trouvez tous les éléments d'ordre

(i) 2 ;

(ii) 4. *[4 points]*

(d) Trouvez un sous-groupe cyclique d'ordre 4. *[2 points]*

Mathématiques discrètes

8. *[Note maximum : 30]*

(i) Trouvez la solution générale de l'équation aux différences,

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 28x_n\,,\ x_0 = 7\,,\ x_1 = -6\,,\ \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots .$$ *[5 points]*

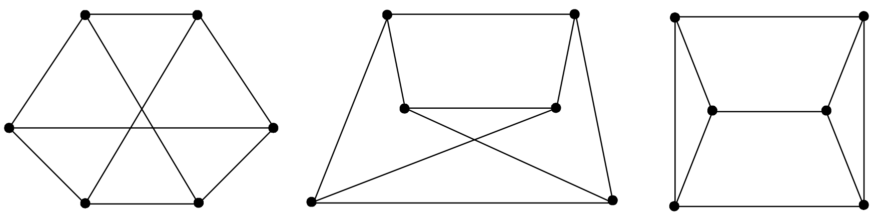
(ii) (a) Définissez les termes suivants.

(i) Un graphe bipartie.

(ii) Un isomorphisme entre deux graphes, *M* et *N*. *[4 points]*

(b) Démontrez qu'un isomorphisme entre deux graphes envoie un cycle de l'un des graphes sur un cycle de l'autre graphe. *[3 points]*

(c) Les graphes *G*, *H* et *J* sont dessinés ci-dessous.



G　　*H*　　*J*

(i) En en donnant la raison, déterminez si *G* est ou n'est pas un graphe bipartie.

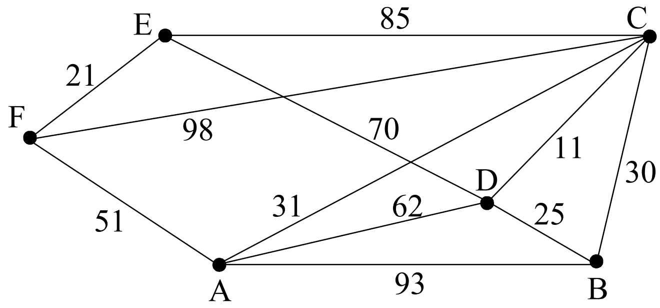
(ii) En en donnant la raison, déterminez s'il existe ou n'existe pas un isomorphisme entre les graphes *G* et *H*.

(iii) En utilisant le résultat de la partie (b), ou autrement, déterminez si le graphe *H* est ou n'est pas isomorphe au graphe *J*. *[7 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8)

(iii) La figure ci-dessous décrit un graphe pondéré.



(a) En utilisant l'algorithme de Kruskal, trouvez un arbre couvrant minimal de ce graphe. *[4 points]*

(b) Dessinez l'arbre couvrant minimal et trouvez son poids. *[2 points]*

(iv) (a) Énoncez le principe du bon ordre. *[2 points]*

(b) En utilisant le principe du bon ordre démontrez que, étant donné deux entiers positifs a et $b, (a < b)$, il existe un entier positif n tel que $na > b$. *[3 points]*

Analyse et approximation

9. *[Note maximum : 30]*

(i) Déterminez si la série suivante est convergente ou divergente.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left[\frac{(k-1)\pi}{2k}\right]$$ *[5 points]*

(ii) Soit $f : x \mapsto \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Soit A l'aire de la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses Ox et la droite $x = \frac{\pi}{2}$. Trouvez la valeur de A. *[2 points]*

(b) En utilisant la méthode de Simpson, trouvez une approximation de A avec une erreur inférieure à 10^{-4}. *[6 points]*

(c) Vérifiez que l'erreur est inférieure à 10^{-4}. *[1 point]*

(iii) (a) En utilisant le théorème de la moyenne, démontrez que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \le x$. *[2 points]*

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, démontrez que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$. *[4 points]*

(iv) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$.

(a) Montrez que, pour $m \in \mathbb{Z}^+$, $S_{4m} = 0$. *[7 points]*

(b) Montrez que $S_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. *[2 points]*

(c) À partir de là ou par toute autre méthode, montrez que la série converge lorsque $n \to \infty$, et trouvez sa limite. *[1 point]*

Géométrie euclidienne et sections coniques

10. *[Note maximum : 30]*

(i) Le foyer d'une parabole C est le point $\mathrm{F}(a\,;b)$ et l'équation de sa directrice est $x = -a$.

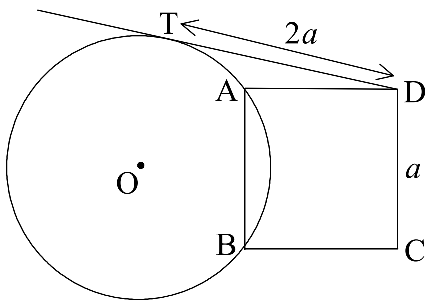
(a) (i) À partir de la définition, trouvez l'équation de C.

(ii) Faites un croquis de C, en indiquant le foyer, la directrice, l'axe de symétrie et le sommet. *[6 points]*

(b) Le point P d'abscisse $x = \dfrac{3a}{2}$ se trouve sur la partie supérieure de C. La tangente à C en P coupe l'axe de symétrie de C au point Q. La droite passant par le sommet V de C et perpendiculaire à la tangente (PQ) coupe (PQ) au point R. Démontrez que $\mathrm{PR} : \mathrm{RQ} = 7 : 3$. *[12 points]*

(c) La droite passant par F parallèle à (VR) coupe la droite (PQ) au point S. Trouvez les coordonnées de S. *[4 points]*

(ii) La figure montre un carré ABCD de côté a. Un cercle, de centre O, de rayon r, passe par les sommets A et B. La longueur de la tangente au cercle passant par D est $2a$.



Trouvez une expression de r en fonction de a. *[8 points]*