

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número del alumno

--	--	--	--	--	--	--	--

Jueves 6 de mayo de 2004 (tarde)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de alumno en la casilla de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. El polinomio $x^2 - 4x + 3$ es un divisor de $x^3 + (a - 4)x^2 + (3 - 4a)x + 3$.
Calcule el valor de la constante a .

Operaciones:

Respuesta:

2. Sabiendo que $\frac{dy}{dx} = e^x - 2x$, y que cuando $x = 0$, $y = 3$, halle la expresión de y en función de x .

Operaciones:

Respuesta:

3. Para $-3 \leq x \leq 3$, halle las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas

$$y = x \operatorname{sen} x \text{ y } x + 3y = 1.$$

Operaciones:

Respuesta:

4. Los tres términos a , 1 , b están en progresión aritmética. Los tres términos 1 , a , b , están en progresión geométrica. Halle el valor de a y de b , sabiendo que $a \neq b$.

Operaciones:

Respuesta:

5. Las transformaciones lineales M y S están representadas por las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dé una descripción geométrica completa de la transformación simple representada por la matriz SMS .

Operaciones:

Respuesta:

6. Sea z el número complejo dado por

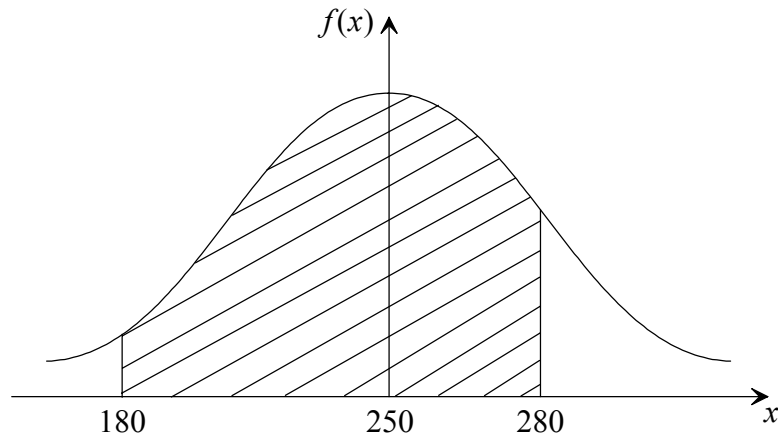
$$z = 1 + \frac{i}{i - \sqrt{3}}.$$

Expresa z en la forma $a + bi$, dando los valores **exactos** de las constantes reales a , b .

Operaciones:

Respuesta:

7. La siguiente figura muestra la función densidad de probabilidad para la variable aleatoria X , que está normalmente distribuida con media 250 y desviación típica 50.



Halle la probabilidad representada por la región sombreada.

Operaciones:

Respuesta:

8. El punto $P(1, p)$, con $p > 0$, pertenece a la curva $2x^2y + 3y^2 = 16$.

(a) Calcule el valor de p .

(b) Calcule la pendiente de la tangente a la curva en P.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____

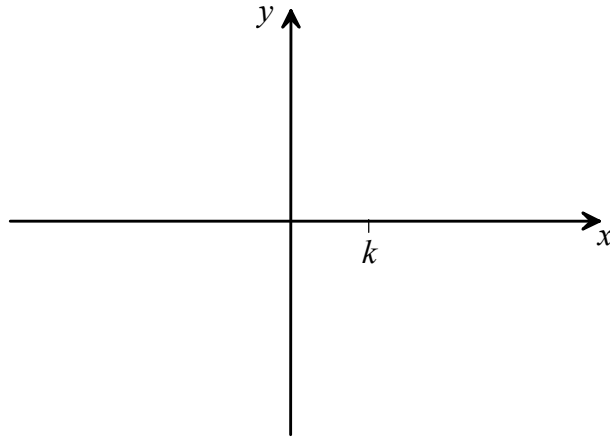
9. La recta $r = i + k + \mu(i - j + 2k)$ y el plano $2x - y + z + 2 = 0$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

Operaciones:

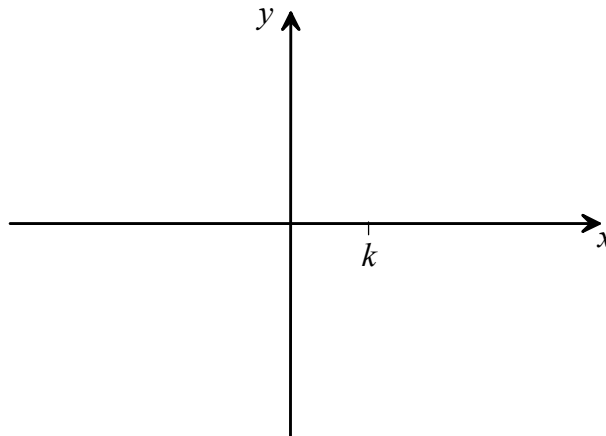
Respuesta:

10. Sea $f(x) = \frac{k}{x-k}$, $x \neq k$, $k > 0$.

- (a) Dibuje aproximadamente, sobre el diagrama que aparece a continuación, la gráfica de f . Rotule claramente todos los puntos de intersección con los ejes y todas las asíntotas.



- (b) Dibuje aproximadamente, sobre el diagrama que aparece a continuación, la gráfica de $\frac{1}{f}$. Rotule claramente todos los puntos de intersección con los ejes.



Operaciones:

11. La función f viene definida por $f : x \mapsto x^3$.

Halle la expresión de $g(x)$ en función de x en cada uno de los siguientes casos

(a) $(f \circ g)(x) = x + 1$;

(b) $(g \circ f)(x) = x + 1$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____

12. (a) Halle $\int_0^m \frac{dx}{2x+3}$, expresando la respuesta en función de m .

(b) Suponiendo que $\int_0^m \frac{dx}{2x+3} = 1$, calcule el valor de m .

Operaciones:

Respuestas:

(a) _____

(b) _____

13. La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{k}{x}, & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Calcule

- (a) el valor de la constante k ;
- (b) $E(X)$.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

14. Roberto va al trabajo en tren todos los días de la semana de lunes a viernes. La probabilidad de que el lunes tome el tren de las 8:00 es 0,66. La probabilidad de que tome el tren de las 8:00 cualquiera de los otros cuatro días de la semana es 0,75. Se elige al azar un día de la semana.
- (a) Halle la probabilidad de que tome el tren ese día.
 - (b) Suponiendo que ese día haya tomado el tren de las 8:00, halle la probabilidad de que ese día sea lunes.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

15. Suponiendo que $\mathbf{a} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{k})$,

- (a) halle \mathbf{a} ;
- (b) halle la proyección vectorial de \mathbf{a} sobre el vector $-2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Operaciones:

Respuestas:

- (a) _____
- (b) _____

16. Resuelva la inecuación

$$\left| \frac{x+9}{x-9} \right| \leq 2.$$

Operaciones:

Respuesta:

17. La función f viene definida por $f : x \mapsto 3^x$.

Resuelva la ecuación $f''(x) = 2$.

Operaciones:

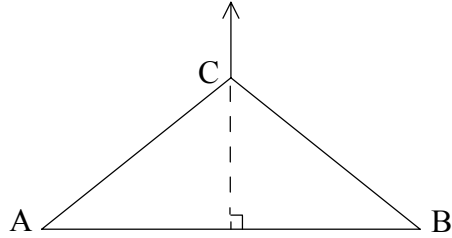
Respuesta:

18. Halle $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Operaciones:

Respuesta:

19. La siguiente figura muestra un triángulo isósceles ABC con $AB = 10$ cm y $AC = BC$. El vértice C se mueve en dirección perpendicular a (AB) con una velocidad de 2 cm por segundo.



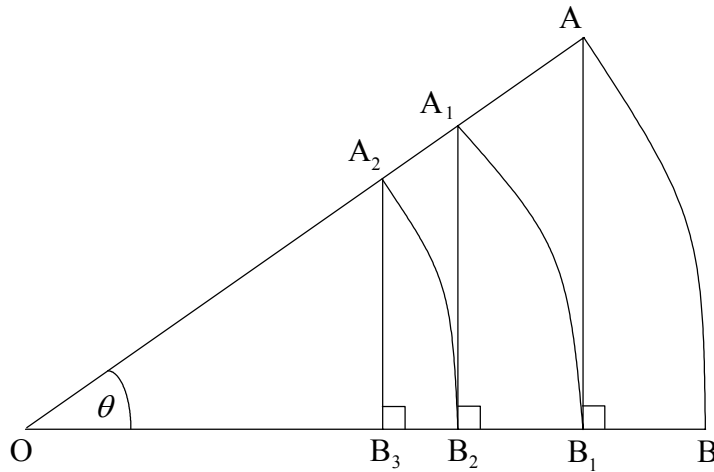
Calcule la tasa de variación del ángulo CAB en el instante en el que el triángulo es equilátero.

Operaciones:

Respuesta:

20. La figura que aparece a continuación muestra un sector circular AOB de un círculo de radio 1 y centro O, con $\widehat{AOB} = \theta$.

Las rectas (AB_1) , (A_1B_2) , (A_2B_3) son perpendiculares a OB. A_1B_1 , A_2B_2 son todos arcos de circunferencia con centro en O.



Calcule la suma infinita de las longitudes de los arcos

$$AB + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \dots$$

Operaciones:

Respuesta: